

WEBVTT

00:00:10.545 --> 00:00:11.653

안녕하세요?

00:00:11.753 --> 00:00:14.380

수포자를 위한 수학 기초
특강, 저는 김미주입니다.

00:00:14.480 --> 00:00:18.968

이제 26강에서는 지난 강에서
배웠던 함수를 가지고

00:00:19.068 --> 00:00:23.154

새로운 함수들 사이의 연산을
정의를 해보도록 하겠습니다.

00:00:23.254 --> 00:00:26.183

그 연산의 결과로 새로운
함수가 나오게 돼요.

00:00:26.283 --> 00:00:32.523

우리 집합 같은 경우도 $A \cap B$ 했을
때 하나의 집합으로 나왔었죠.

00:00:32.623 --> 00:00:36.039

그리고 $A \cup B$ 했을 때 또
하나의 집합이 나왔었고요.

00:00:36.139 --> 00:00:39.764

연산이라는 것 자체가 어떤 2개를
가지고 어떤 조작을 했을 때

00:00:39.864 --> 00:00:43.777

그 2개 조작했던 거랑 같은 종류의
것이 튀어나오는 거였어요.

00:00:43.877 --> 00:00:48.830

$2+3$ 하면 5가 나오고,
계산했을 때 수가 나오고

00:00:48.930 --> 00:00:52.167

이러는 것처럼 이제 집합끼리
연산했을 때 집합,

00:00:52.267 --> 00:00:55.896

그리고 함수끼리 하나의 연산을
해서 합성함수라는 것.

00:00:55.996 --> 00:00:59.272

그리고 하나의 함수를 가지고
새로운 어떤 관계를 정의해서

00:00:59.372 --> 00:01:01.700

역함수라는 것을 만들어
보도록 하겠습니다.

00:01:01.800 --> 00:01:05.706

마치 우리 집합에서도 하나의 집합과
전체 집합 간의 관계를 봐서

00:01:05.806 --> 00:01:09.672
여집합 이런 걸 만들었던 것처럼
이제 역함수라는 걸 만들고

00:01:09.772 --> 00:01:12.102
그리고 합성함수라는
것을 보게 될 거예요.

00:01:12.202 --> 00:01:15.954
그럼 합성함수라는 게 어떤
모티베이션에서 나오게 되는 것이냐

00:01:16.054 --> 00:01:17.348
한번 생각을 해볼게요.

00:01:17.448 --> 00:01:20.558
혜연이랑 태환이랑 원제는,
이름이 좀 어렵죠?

00:01:20.658 --> 00:01:23.548
제가 친하게 지내던
선생님들의 이름이에요.

00:01:23.648 --> 00:01:26.880
혜연은 손혜연 선생님, 우리
강남인강에 또 계시기도 하죠.

00:01:26.980 --> 00:01:31.140
그래서 그런 중국, 미국, 호주,
영국 중 한 나라를 택해서

00:01:31.240 --> 00:01:33.608
그 나라의 수도를
여행하기로 했어요.

00:01:33.708 --> 00:01:38.003
그래서 정의역에 혜연, 태환,
원제가 들어가 있고,

00:01:38.103 --> 00:01:41.114
그다음에 공역에 나라들이
들어가고요.

00:01:41.214 --> 00:01:44.902
그다음에 또 Z라는 하나의
집합을 생각을 해서

00:01:45.002 --> 00:01:47.150
각 나라의 수도를 넣어놨습니다.

00:01:47.250 --> 00:01:49.123
혜연이는 중국에 갈 거예요.

00:01:49.223 --> 00:01:52.119
태환이는 영국에 가고, 원제는
미국에 가기로 했습니다.

00:01:52.219 --> 00:01:57.643
그렇다면 중국의 수도는 베이징,
그다음에 미국의 수도는 워싱턴,

00:01:57.743 --> 00:02:01.630

호주는 캔버라, 영국은 런던
이렇게 나오게 되거든요.

00:02:01.730 --> 00:02:07.035

각 사람이 여행하게 될 도시를
대응관계로 나타낸다고 해볼게요.

00:02:07.135 --> 00:02:10.048

그러면 각 사람이
X에 들어가 있어요.

00:02:10.148 --> 00:02:14.175

헤연이와 태환이와 원제가
여기에 이렇게 있고,

00:02:14.275 --> 00:02:18.218

그다음에 도시로 바로 연결을
해주려고 하는 거예요.

00:02:18.318 --> 00:02:24.694

그래서 도시를 런던, 캔버라,
워싱턴, 베이징 이렇게 갔을 때

00:02:24.794 --> 00:02:26.098

한번 볼까요?

00:02:26.198 --> 00:02:28.526

헤연이가 중국을 택했어요.

00:02:28.626 --> 00:02:31.572

그런데 중국의 수도는 어디예요?
베이징이죠.

00:02:31.672 --> 00:02:36.127

그렇기 때문에 헤연이 결국은
가게 되는 곳은 베이징입니다.

00:02:36.227 --> 00:02:38.407

태환이는 영국을 택했어요.

00:02:38.507 --> 00:02:40.057

영국의 수도가 런던이죠.

00:02:40.157 --> 00:02:42.890

그렇기 때문에 태환이는
런던에 가게 될 거예요.

00:02:42.990 --> 00:02:47.082

원제는 미국을 택했는데 미국의
수도는 워싱턴이기 때문에

00:02:47.182 --> 00:02:51.056

이렇게 원제가 가게 되는
곳은 워싱턴입니다.

00:02:51.156 --> 00:02:56.631

그럼 이거 X라는 집합에서
Z로 가는 이 대응을 한번

00:02:56.731 --> 00:02:58.558

생각해 보도록 할게요.

00:02:58.658 --> 00:03:03.068
X를 정의역이라고 한번 생각을
했을 때 정의역에 들어가게 되는

00:03:03.168 --> 00:03:08.884
이 세 원소에 대해서 Z의 각 원소가
오직 하나씩 잘 대응이 되어 있나요?

00:03:08.984 --> 00:03:14.140
다 하나씩 빠짐없이 잘 대응이
되어 있다고 볼 수 있죠.

00:03:14.240 --> 00:03:17.813
헤연이가 욕심을 내서 나는
캔버라도 갈래, 이거 아니라

00:03:17.913 --> 00:03:21.711
한 나라씩을 택해서 간다고
했기 때문에 다 하나씩 대응이

00:03:21.811 --> 00:03:23.609
잘 되어 있다고 볼 수가 있습니다.

00:03:23.709 --> 00:03:26.449
f라는 것이 일종의
하나의 함수였어요.

00:03:26.549 --> 00:03:28.140
이 g라는 것도 함수였습니다.

00:03:28.240 --> 00:03:32.620
f는 어디로 여행을 갈 것인가를
정하는 그 나라를 정하는 함수이고,

00:03:32.720 --> 00:03:35.915
g는 각 나라의 수도를
대응시켜주는 함수였어요.

00:03:36.015 --> 00:03:39.626
그래서 각 사람이 눌러
가게 될 이 도시를 보니까

00:03:39.726 --> 00:03:41.857
이게 함수가 되었다는 것입니다.

00:03:41.957 --> 00:03:46.007
함수와 함수를 연결해서 새로운
함수를 만들어냈어요.

00:03:46.107 --> 00:03:49.887
그래서 이 대응이 함수이냐라고
한다면 yes가 되는 거고,

00:03:49.987 --> 00:03:54.679
그러면 어떤 함수이냐라고 했을 때
두 함수를 조인을 했다는 거죠.

00:03:54.779 --> 00:03:56.063
어떻게 했죠?

00:03:56.163 --> 00:03:59.731

두 함수가 f 가 X 에서
 Y 로 가는 게 있었어요.

00:03:59.831 --> 00:04:02.250

g 는 Y 에서 Z 로 가는
것이 있었습니다.

00:04:02.350 --> 00:04:07.477

아까 사람들이 나라를 택했고, 나라에서
수도를 택하는 함수가 있었어요.

00:04:07.577 --> 00:04:14.818

그런데 X 의 각 원소 x 에 Z 의 원소를
어떻게 대응을 시켜주는냐고 한다면

00:04:14.918 --> 00:04:21.175

f 에 의해 x 가 대응된 그
값을 g 에다 넣은 값을

00:04:21.275 --> 00:04:23.991

함숫값으로 하겠다는 거예요.

00:04:24.091 --> 00:04:28.593

무슨 뜻이냐면 아까 우리
이 상황을 생각해 볼게요.

00:04:28.693 --> 00:04:34.405

f 에 의해서 혜연이는 어디로
갔었냐면 중국으로 갔어요.

00:04:34.505 --> 00:04:38.840

그러면 최종적으로 혜연이가
가게 되는 곳은 어디였죠?

00:04:38.940 --> 00:04:40.387

베이징이었죠.

00:04:40.487 --> 00:04:45.309

그런데 이 중국을 g 에다
넣었을 때 나오게 되는 곳이

00:04:45.409 --> 00:04:47.169

바로 베이징이었거든요.

00:04:47.269 --> 00:04:51.217

그렇다면 이것을 어떻게 연결지은
거라고 볼 수가 있냐면

00:04:51.317 --> 00:04:53.113

이 중국을 여기다 넣었죠.

00:04:53.213 --> 00:04:57.692

결국 이 f (혜연)을 여기다가 넣었다고
생각을 해줄 수가 있는 거예요.

00:04:57.792 --> 00:05:04.538

g 에다 f (혜연), 혜연이가 f 에
의해서 선택한 나라를 g 에다 넣어서

00:05:04.638 --> 00:05:10.312
대응이 되도록 하는 도시인 베이징이
새로운 어떤 함수의 함숫값으로

00:05:10.412 --> 00:05:12.060
대응이 된다고 할 수가 있습니다.

00:05:12.160 --> 00:05:15.675
여기에서 대응되는 규칙이
뭐였냐라고 한다면

00:05:15.775 --> 00:05:18.493
이제 그걸 기호로
어떻게 써줄 거냐면

00:05:18.593 --> 00:05:22.075
먼저 f 로 헤연이가
나라를 택했어요.

00:05:22.175 --> 00:05:27.086
그다음에는 g 를 이어 붙여서
그 나라에 해당하는 수도를

00:05:27.186 --> 00:05:31.511
택하게 되었다라고 해서
 f 합성 g 라는 것으로

00:05:31.611 --> 00:05:33.056
나타내 줄 수가 있는 거예요.

00:05:33.156 --> 00:05:38.106
그래서 X 의 각 원소 x 에 Z 의
원소를 대응시켜주는 방법이

00:05:38.206 --> 00:05:42.658
먼저 f 로 대응을 시키고
그걸 다시 g 로 대응시키면

00:05:42.758 --> 00:05:45.657
 X 를 정의역으로 하고
 Z 를 공역으로 하는

00:05:45.757 --> 00:05:47.684
새로운 함수가 만들어진다는 거죠.

00:05:47.784 --> 00:05:49.440
함수가 되는 게 맞나요?

00:05:49.540 --> 00:05:55.014
애초에 $f(x)$ 가 f 에 의해서 x 가 오직
하나씩 하나로 잘 대응이 되었어요.

00:05:55.114 --> 00:05:58.283
그런데 g 도 역시 다
그렇게 대응이 잘 돼요.

00:05:58.383 --> 00:06:04.232
 $f(x)$ 가 g 의 정의역에
들어가는 원소이기만 하다면.

00:06:04.332 --> 00:06:09.263

즉, $f(x)$ 들을 모은 치역이
애네 치역이, f 의 치역이 g 의 정의역에

00:06:09.363 --> 00:06:14.125
포함이 되는 관계만 있다고 한다면
함수로써 정의가 될 수가 있겠죠.

00:06:14.225 --> 00:06:18.612
그래서 새로운 함수를 이름을
만약에 h 라고 이렇게 지었을 때

00:06:18.712 --> 00:06:23.408
새로운 함수 h 를 만들 수가 있는데
이 h 를 뭐라고 부르느냐.

00:06:23.508 --> 00:06:28.747
 f 와 g 의 합성함수라고 하고
기호로는 f 합성 g .

00:06:28.847 --> 00:06:30.560
오른쪽부터 써줘요.

00:06:30.660 --> 00:06:33.920
우리 쓰는 순서를 먼저 누구에
의해서 대응을 시켰죠?

00:06:34.020 --> 00:06:37.519
 f 에 의해서 나라를 정했고,
그다음에 도시를 정했어요.

00:06:37.619 --> 00:06:41.573
이렇게 나라에서 도시로, 오른쪽에서
왼쪽으로 먼저 가면서.

00:06:41.673 --> 00:06:45.487
왜냐하면 그게 이제 함숫값을
대응시킬 때 좀 더 자연스러워요.

00:06:45.587 --> 00:06:51.575
 f 에 의해서 혜연이가 중국으로 갔고,
그 중국을 다시 g 에다 넣는다고

00:06:51.675 --> 00:06:56.372
생각해 보면 이렇게 쓰여지는 순서로
봤을 때 f 를 먼저 적용시키고

00:06:56.472 --> 00:06:57.948
 g 를 적용시키는 거죠.

00:06:58.048 --> 00:07:00.402
그래서 이렇게 f 합성 g 가 된다.

00:07:00.502 --> 00:07:04.125
오른쪽부터 써서 기호로
나타내 줄 수가 있습니다.

00:07:04.225 --> 00:07:07.860
이런 것을 함수의 합성이라고
이야기를 해줘요.

00:07:07.960 --> 00:07:12.039

그래서 합성함수의 정의 딱 이게
정의다라고 나오는 걸 보면

00:07:12.139 --> 00:07:15.027
f는 X에서 Y로 가는 함수고요.

00:07:15.127 --> 00:07:17.841
g는 Y에서 Z로 가는 함수예요.

00:07:17.941 --> 00:07:19.432
이 둘을 합성했다.

00:07:19.532 --> 00:07:24.398
f에서 g, f 먼저 대응시키고 g로
가는 것을 합성을 한다고 한다면

00:07:24.498 --> 00:07:29.453
X에서 애네가 연결고리가 되어서
Z로 가겠다는 거예요.

00:07:29.553 --> 00:07:34.954
그리고 f 합성 g라는 이 함수에
의해서 x를 이제 대응시켜줄 때

00:07:35.054 --> 00:07:36.755
어떻게 대응을 시키느냐.

00:07:36.855 --> 00:07:40.742
먼저 x를 f에 의해서
대응을 시키는 거죠.

00:07:40.842 --> 00:07:46.416
그림으로 나타낸다면 X가 있고,
Y가 있고, Z가 있었어요.

00:07:46.516 --> 00:07:48.401
먼저 누구에 의해서 대응?

00:07:48.501 --> 00:07:54.390
f에 의해서 X의 원소 x를
f(x)로 대응을 시켜줍니다.

00:07:54.490 --> 00:08:00.041
여기로 대응된 것을 다시 받아서 g에
의해서 대응을 시켜주는 거예요.

00:08:00.141 --> 00:08:04.437
그러면 f(x)라는 하나의 어떤
원소를 여기 g에다 넣은 값으로

00:08:04.537 --> 00:08:07.544
대응을 시켜서 이런 결과가
나오게 될 수가 있겠죠.

00:08:07.644 --> 00:08:09.864
그래서 이렇게 정의된 함수.

00:08:09.964 --> 00:08:13.355
그러면 이게 처음과
끝을 연결해서 본다면

00:08:13.455 --> 00:08:16.745

결국 X 에서 Z 로 가는
함수라고 할 수 있고,

00:08:16.845 --> 00:08:21.245

이것을 우리가 기호로 표시해 줄 때
 f 에다 조그마한 동그라미예요.

00:08:21.345 --> 00:08:26.237

동그라미 g 이렇게 표시를 해서 f
합성 g 라고 얘기를 해줄 수가 있는데.

00:08:26.337 --> 00:08:30.710

만약에 f 에 의해서 대응된 이
치역의 값이 y 의 부분집합이

00:08:30.810 --> 00:08:34.628

아니라고 한다면 함수가 제대로
정의가 될 수가 없을 거예요.

00:08:34.728 --> 00:08:39.489

제가 지금은 X 가 Y 로 가고, Y 가
 Y 로 이렇게 똑같은 집합을 썼기 때문에

00:08:39.589 --> 00:08:42.334

당연히 함수가 잘 정의가
될 수가 있는데.

00:08:42.434 --> 00:08:46.084

이게 만약에 W 라는 집합,
서로 다른 집합으로 나왔어요.

00:08:46.184 --> 00:08:51.092

그렇다고 한다면 f 의 치역이
 W 의 부분집합이 되기만 한다면

00:08:51.192 --> 00:08:54.043

함수가 잘 정의가 될 수 있습니다.

00:08:54.143 --> 00:08:55.960

그래서 그런 것들.

00:08:56.060 --> 00:08:58.894

그러니까 예를 들어서 우리
아까 여기에 그 예로 봤을 때

00:08:58.994 --> 00:09:02.042

만약에 이 Y 에는
호주를 빼놔었어요.

00:09:02.142 --> 00:09:05.365

그런데 여기에는 그냥 호주가
있었어요라고 한다면

00:09:05.465 --> 00:09:08.997

그래도 둘을 연결지어서 함수를
정의해줄 수가 있는 거예요.

00:09:09.097 --> 00:09:12.763

어차피 이거의 치역 중국,
미국, 영국이 있는 것이

00:09:12.863 --> 00:09:16.635

여기에서 대응될 아이들
존재하는 거잖아요.

00:09:16.735 --> 00:09:20.136

그렇기 때문에 그렇게 되더라도
반드시 2개가 같을 필요는 없고,

00:09:20.236 --> 00:09:23.414

여기 치역이 이거의
부분으로 들어가기만 한다면

00:09:23.514 --> 00:09:25.599

이제 합성함수를 정의해
줄 수가 있습니다.

00:09:25.699 --> 00:09:29.016

그렇게 중요한 내용은 아니고 그냥
엄밀하게 혹시 궁금증 가지실까 봐

00:09:29.116 --> 00:09:32.303

애기드린 거고, 방금 제가
그림으로 나타냈던 거

00:09:32.403 --> 00:09:33.992

이렇게 나타낼 수 있는데.

00:09:34.092 --> 00:09:37.041

여러분, 혹시 합성함수
이렇게 대응시키는 거를

00:09:37.141 --> 00:09:39.565

자유롭게 그림으로
그려보실 수 있겠어요?

00:09:39.665 --> 00:09:41.391

이런 그림도 가능합니다.

00:09:41.491 --> 00:09:43.164

이런 식으로 표현을
할 수도 있어요.

00:09:43.264 --> 00:09:45.144

어떤 원소가 들어갔어요.

00:09:45.244 --> 00:09:49.428

동그라미라는 것이 f 에 의해서
직육면체 모양으로 이렇게 나옵니다.

00:09:49.528 --> 00:09:53.329

구가 들어가서 이렇게 나왔으면
이걸 다시 여기의 모양은

00:09:53.429 --> 00:09:56.110

이렇게 생긴 애들이 들어갈
수 있는 그런 기계예요.

00:09:56.210 --> 00:09:59.782

애가 여기로 들어가서 새로운
모양으로 나오게 된다.

00:09:59.882 --> 00:10:03.062

그런데 이 과정을 그러면
하나의 통으로 보면

00:10:03.162 --> 00:10:07.549

사실 속에서는 이런 기작이
일어나고 있는 건데

00:10:07.649 --> 00:10:10.426

동그라미가 한 번에 이거로
나오는 것이 아니라

00:10:10.526 --> 00:10:14.432

여기에서는 원래 네모로 나오고
그 네모를 세모로 바꿔주는

00:10:14.532 --> 00:10:16.813

모양에 의해서 그렇게 나왔던 건데.

00:10:16.913 --> 00:10:19.715

전체적으로 여기 속에 내용을
모르고 길이 그냥 예쁘게

00:10:19.815 --> 00:10:23.174

색칠이 되어 있었다고 한다면
그냥 동그라미가 들어가서

00:10:23.274 --> 00:10:26.665

이게 나오는 하나의 함수처럼
볼 수가 있다는 거죠.

00:10:26.765 --> 00:10:29.532

이런 것이 바로 합성함수가 됩니다.

00:10:29.632 --> 00:10:33.123

그러면 예를 들어서 한번 이
값들을 구해보도록 할게요.

00:10:33.223 --> 00:10:35.872

오른쪽에 있는 거부터
대입한다고 했습니다.

00:10:35.972 --> 00:10:38.515

f에다 -1을 대입해요.

00:10:38.615 --> 00:10:40.334

그러면 값이 얼마가 나오죠?

00:10:40.434 --> 00:10:46.165

$f(-1)=2 \times -1 + 1$ 이니까
-1이 나오네요.

00:10:46.265 --> 00:10:49.605

그것을 g에다 넣어주라는 거예요.

00:10:49.705 --> 00:10:54.126

이거를 계산하는 거니까 방금
-1로 계산을 했기 때문에

00:10:54.226 --> 00:10:56.403

$g(-1)$ 이 되겠죠.

00:10:56.503 --> 00:11:00.738

그러면 $g(-1)$ 은 대입해서 계산해 보니까 값이 3으로 나오게 되죠.

00:11:00.838 --> 00:11:04.820

이렇게 합성함수에 의한 함숫값을 계산해 줄 수가 있어요.

00:11:04.920 --> 00:11:10.060

이번에는 g 에다 2를 넣은 것을 순서를 바꿔서 해보자는 거예요.

00:11:10.160 --> 00:11:13.040

f 에다 $g(2)$ 를 대입해 줍니다.

00:11:13.140 --> 00:11:15.459

지금 정의역, 공역은 모두 다 실수 전체예요.

00:11:15.559 --> 00:11:17.827

다 같은 집합들을 정의역, 공역으로 가지니까

00:11:17.927 --> 00:11:21.412

어떻게 연결해서 붙이든 다 함수가 잘 정의가 될 수 있겠죠.

00:11:21.512 --> 00:11:24.207

$g(2)$ 의 값은 0이 되네요.

00:11:24.307 --> 00:11:26.936

그러면 이거는 그럼 이거는 $f(0)$ 이라고 할 수가 있고.

00:11:27.036 --> 00:11:30.748

$f(0)=2 \times 0 + 1$ 해보면 1로 나오게 되는 거예요.

00:11:30.848 --> 00:11:34.601

그러면 아예 이 함수식을 일반적으로 구해볼 수도 있을까요?

00:11:34.701 --> 00:11:40.077

이거는 또 오른쪽부터 적용을 해본다면 g 에다 $f(x)$ 를 넣어주라는 거예요.

00:11:40.177 --> 00:11:46.820

그러면 g 에다 $f(x)$ 를 넣는다는 것은 $2x+1$ 을 넣는 것과 마찬가지죠.

00:11:46.920 --> 00:11:51.574

그러면 마이너스 이 x 자리에 $2x+1$ 이 들어가는 것이니까

00:11:51.674 --> 00:11:53.737

이렇게 써줄 수가 있겠네요.

00:11:53.837 --> 00:12:01.592

그럼 $-2x-1+2$ 가 되기 때문에

$-2x+1$ 이 된다, 이렇게 결과가 나오겠죠.

00:12:01.692 --> 00:12:05.806

합성함수의 함수식도
찾을 수가 있어요.

00:12:05.906 --> 00:12:08.869

그러면 합성함수의
어떤 성질이 있을까.

00:12:08.969 --> 00:12:12.959

연산이기 때문에 이 연산에
대한 기본적인 성질을

00:12:13.059 --> 00:12:15.366

한번 확인을 해볼 필요가 있거든요.

00:12:15.466 --> 00:12:19.385

그러니까 함수 두 함수를
연산한 결과의 이름을

00:12:19.485 --> 00:12:21.310

우리가 합성함수라고 부르는 거예요.

00:12:21.410 --> 00:12:25.235

두 집합을 교집합하는 연산을
했을 때 A와 B의 교집합

00:12:25.335 --> 00:12:28.416

이렇게 불렀던 것처럼
f하고 g의 합성함수.

00:12:28.516 --> 00:12:30.612

그러면 교집합 우리가
구했을 때 확인했던 것이

00:12:30.712 --> 00:12:34.662

교환법칙과 결합법칙
성립하느냐라는 걸 봤잖아요.

00:12:34.762 --> 00:12:38.627

그리고 연산이 2개, 교집합,
합집합이 같이 나오니까

00:12:38.727 --> 00:12:40.109

분배법칙도 봤었고.

00:12:40.209 --> 00:12:42.288

지금 여기에서는 분배법칙은
보지 않을 거예요.

00:12:42.388 --> 00:12:45.083

합성함수라는 연산 하나만
다루고 있기 때문에

00:12:45.183 --> 00:12:47.531

분배를 해줄 다른
연산이 또 없어요.

00:12:47.631 --> 00:12:51.879

그래서 이 합성함수라는 연산

하나를 놓고 교환법칙이랑

00:12:51.979 --> 00:12:55.599
결합법칙이 성립하는지 예를 들어서
확인을 해보고자 합니다.

00:12:55.699 --> 00:12:58.432
교환법칙 성립할 수 있을까요?

00:12:58.532 --> 00:13:02.249
순서를 바꾸어서 함수를
만들 수 있을까요?

00:13:02.349 --> 00:13:06.145
우리 일반적으로 실수 전체가
공역이고 정의역이라고 한다면

00:13:06.245 --> 00:13:08.593
순서를 바꿨을 때 함수는
만들 수 있어요.

00:13:08.693 --> 00:13:11.965
그런데 아까 우리 헤연이, 원제,
태환이 상황 생각해 볼까요?

00:13:12.065 --> 00:13:16.129
거꾸로 가는 함수를 이제 다르게
적용을 시킨다고 한다면

00:13:16.229 --> 00:13:21.812
아까 이 상황에서 지금 우리가
 f 를 먼저 적용시키고

00:13:21.912 --> 00:13:23.873
 g 를 적용시키는 함수를 썼었잖아요.

00:13:23.973 --> 00:13:25.398
그런데 g 를 먼저 했다.

00:13:25.498 --> 00:13:26.770
중국에서 베이징 가는 거.

00:13:26.870 --> 00:13:29.140
그다음에 베이징 원소 없어요.

00:13:29.240 --> 00:13:33.219
그러면 아예 이거는 거꾸로
순서대로 합성함수를 정의할 수조차

00:13:33.319 --> 00:13:34.900
없어지게 되는 거거든요.

00:13:35.000 --> 00:13:38.732
그래서 일반적으로 교환법칙은 안
되겠구나라는 걸 알 수 있을 텐데

00:13:38.832 --> 00:13:40.185
한번 구해볼게요.

00:13:40.285 --> 00:13:47.331
 g 합성 f 를 만약에 한다고 한다면 f 에다

$g(x)$ 를 넣어서 계산해 보면 되죠.

00:13:47.431 --> 00:13:53.142
그러면 f 라는 것은 $3x+2$ 였기
때문에 이렇게 먼저 써놔도 돼요.

00:13:53.242 --> 00:13:54.952
 $3g(x)+2$.

00:13:55.052 --> 00:13:58.689
 f 에는 x 가 들어가면 $3x+2$ 를
하는 계산이었어요.

00:13:58.789 --> 00:14:03.002
 $g(x)$ 가 들어갔으니까
 $3g(x)+2$ 가 되겠죠.

00:14:03.102 --> 00:14:11.042
그러면 $3(2x+3)+2$ 가 되면서
결과는 $6x+11$ 이렇게 나오겠네요.

00:14:11.142 --> 00:14:13.982
이번에는 순서를 바꿔서
해보겠습니다.

00:14:14.082 --> 00:14:18.614
이렇게 가니까 이번에는 g 에
 $f(x)$ 를 넣으면 되죠.

00:14:18.714 --> 00:14:25.810
 $f(x)$ 가 $3x+2$ 니까 2에다
 $3x+2$ 를 넣어주고 $+3$ 해준 것.

00:14:25.910 --> 00:14:28.048
제가 조금 더 순서를
빠르게 했어요.

00:14:28.148 --> 00:14:31.616
이 x 자리에 $f(x)$ 인데,
이 $f(x)$ 를 넣는다는 것은

00:14:31.716 --> 00:14:34.661
저 $f(x)$ 식이었던
 $3x+2$ 넣어주고.

00:14:34.761 --> 00:14:38.376
그럼 $6x+4+3$ 이니까
7이 나와요.

00:14:38.476 --> 00:14:42.797
 $6x+11$ 과 $6x+7$ 은
일반적으로 다르죠.

00:14:42.897 --> 00:14:45.987
그렇기 때문에 사실 같도록
하는 값이 하나도 없어요.

00:14:46.087 --> 00:14:47.485
평행한 직선이 나와요.

00:14:47.585 --> 00:14:50.512

2개가 같을 수가 없다는
결론이 나옵니다.

00:14:50.612 --> 00:14:54.650
함수에 따라서는 같아지게
될 수도 있어요.

00:14:54.750 --> 00:14:58.251
같아지게 될 수도 있고, 그런
것들이 이제 문제로 나옵니다.

00:14:58.351 --> 00:15:03.016
애네가 바꿨을 때도, 바꿔서
합성했을 때도 같아지도록 하는

00:15:03.116 --> 00:15:06.078
어떤 미지수의 값을 구하여라
이렇게 나올 수도 있는데.

00:15:06.178 --> 00:15:10.013
그런 미지수의 값을 구하라는
것 자체가 일반적으로는

00:15:10.113 --> 00:15:12.632
성립하지 않는다는 것을
이야기하는 거죠.

00:15:12.732 --> 00:15:17.680
그럼 우리는 합성함수 계산할 때
순서를 굉장히 조심해야겠어요.

00:15:17.780 --> 00:15:21.403
어떤 걸 먼저 넣는지 조심해야 될
거고, 어디부터 넣는다고요?

00:15:21.503 --> 00:15:25.005
오른쪽에 쓰여진 것부터
넣는다는 것을 조심해서

00:15:25.105 --> 00:15:27.112
적용시켜주시면 되겠습니다.

00:15:27.212 --> 00:15:30.376
이번에는 결합법칙을 확인해 볼게요.

00:15:30.476 --> 00:15:35.384
f에다 g 합성 h 한
것을 다시 합성을 해줘요.

00:15:35.484 --> 00:15:39.268
그럼 먼저 g 합성 h(x)부터
구해보도록 할까요?

00:15:39.368 --> 00:15:42.952
이거는 g에다가 h(x)를
넣은 것이 되죠.

00:15:43.052 --> 00:15:49.042
그러면 h(x)가 x-1이기 때문에
g 자리에다 x-1을 넣게 돼요.

00:15:49.142 --> 00:15:51.077
($x-1$)²이 나오게 되겠죠.

00:15:51.177 --> 00:15:54.770
 x^2-2x+1 이고 일단은
이렇게 적어 볼게요.

00:15:54.870 --> 00:15:57.905
그것을 이제 f하고 합성을 합니다.

00:15:58.005 --> 00:16:01.653
f 합성 그러면 g 합성
h를 구하라고 하는 것은

00:16:01.753 --> 00:16:06.548
f에다 g 합성 h를 한 그
결과의 식을 넣어주라는 것이죠.

00:16:06.648 --> 00:16:12.910
그러면 그 결과가 ($x-1$)²이었기
때문에 f에 ($x-1$)²을 넣었다.

00:16:13.010 --> 00:16:17.704
그러면 $2(x-1)^2+1$ 로
그 결과가 나오게 되겠죠.

00:16:17.804 --> 00:16:22.158
f(x)는 넣은 것을 2배
해주고 +1을 해주는 함수니까

00:16:22.258 --> 00:16:23.621
결과가 이렇게 나오네요.

00:16:23.721 --> 00:16:25.785
이번에는 이것을 계산해
보도록 할게요.

00:16:25.885 --> 00:16:29.115
먼저 f하고 g를 먼저
합성을 해주는 거예요.

00:16:29.215 --> 00:16:31.311
그럼 f에다 g(x)를 넣죠.

00:16:31.411 --> 00:16:37.394
그러면 f는 넣은 것을 2배
해주고 1을 더하는 함수였으니까

00:16:37.494 --> 00:16:42.261
먼저 이렇게 쓴다면
 $2x^2+1$ 이라고 나오게 되겠죠.

00:16:42.361 --> 00:16:45.455
이거에다 이제 h를 넣습니다.

00:16:45.555 --> 00:16:51.235
f 합성 g를 해서 나오게 된 이 하나의
함수의 이름을 l이라고 지어볼까요?

00:16:51.335 --> 00:16:53.409
l 합성 g(x)를 하는 거예요.

00:16:53.509 --> 00:16:56.246

그러면 I 에다 $h(x)$ 를
넣게 되는 거고,

00:16:56.346 --> 00:16:59.881

I 에다가 $h(x)$ 에 해당하는
 $x-1$ 을 넣는 거죠.

00:16:59.981 --> 00:17:04.127

그러면 이 I 이라는 함수가
 $2x^2+1$ 이었으니까

00:17:04.227 --> 00:17:07.430

$2(x-1)^2+1$ 을 넣게 되죠.

00:17:07.530 --> 00:17:09.360

결과를 보니까 어떤가요?

00:17:09.460 --> 00:17:12.133

2개가 완전히 똑같이
나오게 되었어요.

00:17:12.233 --> 00:17:17.719

결합법칙이 성립하기 때문에 어떤 것을
묶어서 계산하더라도 똑같거든요.

00:17:17.819 --> 00:17:20.687

그래서 이런 거
구하여라라고 나온다면

00:17:20.787 --> 00:17:22.881

그냥 이렇게 연결해서 쓰시면 돼요.

00:17:22.981 --> 00:17:27.092

순서만 잘 맞춰서 $f, g,$
 h 의 순서만 잘 맞춰서

00:17:27.192 --> 00:17:28.655

여기 괄호가 3개였죠.

00:17:28.755 --> 00:17:30.171

하나, 둘, 셋 이렇게 오도록.

00:17:30.271 --> 00:17:34.251

$h(x)$ 넣어주고 그다음에 $g(x)$
넣고 그다음에 f 에 넣고.

00:17:34.351 --> 00:17:37.490

이런 식으로 3개를 짝
붙여서 쓰셔도 됩니다.

00:17:37.590 --> 00:17:41.697

그래서 합성함수에 대한 교환법칙,
결합법칙이 성립하는가.

00:17:41.797 --> 00:17:47.272

일반적으로 세 함수 f, g, h 에
대해서 교환법칙은 성립하지 않아요.

00:17:47.372 --> 00:17:50.865

그래서 오른쪽 함수에 먼저
대입한다는 거 항상 조심해서

00:17:50.965 --> 00:17:52.488
계산을 해줘야 된다는 거예요.

00:17:52.588 --> 00:17:54.066
교환법칙은 성립하지 않으니까.

00:17:54.166 --> 00:17:58.243
하지만 결합법칙은 성립하기 때문에
순서만 바꾸지 않는다면.

00:17:58.343 --> 00:18:01.539
그러니까 그 순서라는 게 $f, g,$
 h 의 순서의 배열 바꾸지 않는다면

00:18:01.639 --> 00:18:05.904
어떤 2개를 먼저 묶어서 계산을 한
것에 나머지 것을 순서 맞춰서

00:18:06.004 --> 00:18:09.199
대입하든지 상관없이 없는
그런 상황이 돼요.

00:18:09.299 --> 00:18:13.253
그러면 일반적으로는 교환법칙이
성립하지 않는다고 했지만

00:18:13.353 --> 00:18:17.051
이 특수한 상황에 대해서 교환법칙이
혹시 성립하도록 하는 k 가

00:18:17.151 --> 00:18:19.489
존재할까라는 걸 구해보라는 거예요.

00:18:19.589 --> 00:18:25.323
 f 합성 g 를 했을 때
여기에다 x 를 넣었다고 한다면

00:18:25.423 --> 00:18:27.978
 f 에 $g(x)$ 넣어주면 되죠.

00:18:28.078 --> 00:18:34.788
그러면 f 는 $3x+2$ 였으니까
 $3g(x)+2$ 를 계산해주면 되고,

00:18:34.888 --> 00:18:41.566
 $3(2x+k)+2$ 를 해주면
 $6x+3k+2$ 가 나오게 되네요.

00:18:41.666 --> 00:18:44.227
이제 f 합성 g 가 되고.

00:18:44.327 --> 00:18:50.498
 g 합성 f 를 하게 되면 이제
 g 에다 $f(x)$ 를 넣어주게 되죠.

00:18:50.598 --> 00:18:56.350
그러면 g 는 $2x+k$ 였으니까
 $2f(x)+k$ 가 되네요.

00:18:56.450 --> 00:19:00.922
그러면 $2(3x+2)+k$ 예요.

00:19:01.022 --> 00:19:04.905
그럼 $6x+4+k$ 가 되죠.

00:19:05.005 --> 00:19:08.685
2개가 일반적으로 같으면
좋겠다는 거예요.

00:19:08.785 --> 00:19:15.766
 $6x$, $6x$ 는 같으니까 둘이
똑같아지려면 $3k+2$ 와 $4+k$ 가

00:19:15.866 --> 00:19:17.491
서로 같으면 되겠죠.

00:19:17.591 --> 00:19:21.705
 $2k$ 가 2 가 나오게 되면서 k 가
 1 이라는 걸 알 수 있어요.

00:19:21.805 --> 00:19:30.063
 k 가 1 이면 g 합성 f 가 $6x+5$,
 f 합성 g 도 $6x+5$ 가 되면서

00:19:30.163 --> 00:19:35.232
두 함수가 바뀌서 이렇게 하더라도
똑같아진다고 알 수가 있는 것이죠.

00:19:35.332 --> 00:19:39.299
그래서 이런 게 이제 주로 예제로
나오고 교과서에 아마 예제로만

00:19:39.399 --> 00:19:42.688
보게 될 거고 시험 문제에
이런 게 나올 가능성은

00:19:42.788 --> 00:19:43.960
그렇게 크지는 않습니다.

00:19:44.060 --> 00:19:47.935
그다음에 이렇게 세 함수 f , g ,
 h 에 대해서 $f(2)$ 는 3 이고,

00:19:48.035 --> 00:19:52.024
 g 합성 h 에 3 을 넣은 건
 1 이라는 걸 알고 있는데

00:19:52.124 --> 00:19:57.625
지금 계산하라고 한 것이 g 합성
 h 합성 f 에다 2 를 넣은 걸

00:19:57.725 --> 00:19:59.065
구하라고 했어요.

00:19:59.165 --> 00:20:02.931
그럼 내가 f 에다 2 를
넣은 건 뭔지를 알잖아요.

00:20:03.031 --> 00:20:07.490

그런데 애가 이렇게 묶여 있다고 해서 f 에다 2를 못 넣느냐.

00:20:07.590 --> 00:20:13.204
그게 아니라 결합법칙이 성립하니까 g 랑 h 를 먼저 묶어서

00:20:13.304 --> 00:20:17.804
계산한다 치고 이렇게 f 를 따로 떨어뜨린 다음에 여기에 2를 넣은 거로

00:20:17.904 --> 00:20:20.342
생각해도 상관없죠, 결합법칙이 성립해서.

00:20:20.442 --> 00:20:27.437
그러면 애는 g 합성 h 라는 이 함수에다 x 자리에 $f(2)$ 를 넣은 거랑

00:20:27.537 --> 00:20:28.988
같아지게 될 거예요.

00:20:29.088 --> 00:20:31.706
그런데 $f(2)$ 의 값이 3이라고 했거든요.

00:20:31.806 --> 00:20:35.202
그렇기 때문에 여기에다 3을 넣은 것과 같겠죠.

00:20:35.302 --> 00:20:39.330
그러면 이거에 3을 넣은 값이 얼마라고 나와 있죠?

00:20:39.430 --> 00:20:40.466
그냥 1이에요.

00:20:40.566 --> 00:20:44.710
 g 합성 $h(3)$ 계산한 것이 1이 되기 때문에 애의 값은 1이라고

00:20:44.810 --> 00:20:49.081
주어져 있는 정보, 결합법칙으로 재배열해서 다시 쓰기만 한다면

00:20:49.181 --> 00:20:50.649
쉽게 찾을 수가 있었어요.

00:20:50.749 --> 00:20:53.545
이런 연산의 성질을 사용해줄 수가 있습니다.

00:20:53.645 --> 00:20:59.047
그러면 합성함수, 두 함수를 연결해서 붙여서 새로운 함수를

00:20:59.147 --> 00:21:01.994
만든 거라고 할 수가 있는데.

00:21:02.094 --> 00:21:06.011
이번에 다시 우리 헤연이, 태환,

원제 상황으로 돌아와 보도록 합시다.

00:21:06.111 --> 00:21:07.885

또 아까랑 똑같아요.

00:21:07.985 --> 00:21:12.296

중국, 미국, 호주, 영국 중 한
나라를 택하고 그 나라의 수도를

00:21:12.396 --> 00:21:13.832

여행하기로 했어요.

00:21:13.932 --> 00:21:18.709

그래서 f 라는 함수에 의해서 아까랑
똑같이 선택한 상황을 나타냈고요.

00:21:18.809 --> 00:21:22.692

그다음에 g 라는 함수에 의해서 각
나라의 수도를 표시해봤습니다.

00:21:22.792 --> 00:21:28.077

이제 무엇을 찾아 볼 거냐면
각 나라를 여행하는 학생을

00:21:28.177 --> 00:21:31.310

대응 관계로 나타내줄 수 있을까요?

00:21:31.410 --> 00:21:33.732

각 나라를 여행하는 학생.

00:21:33.832 --> 00:21:38.383

중국을 여행하는 학생은 혜연이,
미국을 여행하는 학생은 원제,

00:21:38.483 --> 00:21:40.856

영국을 여행하는 학생은 태환이.

00:21:40.956 --> 00:21:44.146

이렇게 되는데 이 각
나라를 여행하는 학생,

00:21:44.246 --> 00:21:49.297

각 나라를 정의역으로 하고,
여행하는 학생을 공역으로 해서

00:21:49.397 --> 00:21:52.679

한번 함수를 만들 수 있을지를
생각해 해보고자 해요.

00:21:52.779 --> 00:21:58.269

Y 랑 X 랑 순서를 바꿔서 화살표
받았던 대로 대응을 시켜줄 때

00:21:58.369 --> 00:22:01.691

이것이 함수가 될 것인가
한번 여러분 그려볼까요?

00:22:01.791 --> 00:22:05.789

중국, 미국, 호주, 영국
이렇게 되어 있는데.

00:22:05.889 --> 00:22:08.314

혜연이, 태환, 원제.

00:22:08.414 --> 00:22:11.666

중국을 여행하기로 했던
학생은 혜연이었어요.

00:22:11.766 --> 00:22:14.476

미국을 여행하기로 했던
학생은 원제고요.

00:22:14.576 --> 00:22:17.224

호주를 여행하기로
했던 학생은 없어요.

00:22:17.324 --> 00:22:20.470

저는 호주를 참 좋아하는데 여기에
만약에 미주가 섞여 있었으면

00:22:20.570 --> 00:22:22.008

호주를 선택했을 거예요.

00:22:22.108 --> 00:22:24.899

이렇게 해놓고 보니까
이거는 함수인가요?

00:22:24.999 --> 00:22:27.141

애는 함수라고 할 수가 없어요.

00:22:27.241 --> 00:22:30.552

Y에서 X로 가는 함수라고
할 수가 없습니다.

00:22:30.652 --> 00:22:31.878

왜 없죠?

00:22:31.978 --> 00:22:35.291

호주는 대응시켜줄 수
있는 학생이 없어요.

00:22:35.391 --> 00:22:37.186

호주에 대응된 학생이 없어요.

00:22:37.286 --> 00:22:40.303

정의역의 각 원소가 하나씩
대응이 되어야 하는데

00:22:40.403 --> 00:22:42.343

지금 보면 애는 비어 있습니다.

00:22:42.443 --> 00:22:44.362

그러면 함수로 정의를
해줄 수가 없겠죠.

00:22:44.462 --> 00:22:52.053

그러면 이번에는 각 나라를, 그
수도를 나라에 이제 소속 국가에

00:22:52.153 --> 00:22:53.923

대응을 시켜보도록 할게요.

00:22:54.023 --> 00:22:58.509

런던, 캔버라, 워싱턴,
베이징 이렇게 하고

00:22:58.609 --> 00:23:04.302

중국, 미국, 호주, 영국 이렇게 되어
있을 때 런던은 영국의 수도예요.

00:23:04.402 --> 00:23:09.416

캔버라는 호주의 수도이고,
워싱턴은 미국, 베이징은 중국.

00:23:09.516 --> 00:23:11.922

얘는 이제 함수라고 할 수 있나요?

00:23:12.022 --> 00:23:19.071

각 Z 의 원소에 대해서 Y 의 원소가
하나씩 잘 대응이 되어 있어요.

00:23:19.171 --> 00:23:21.748

이것은 함수입니다.

00:23:21.848 --> 00:23:27.327

이제 뭘 하고 싶냐면 역함수라는
것을 정의하고 싶어요.

00:23:27.427 --> 00:23:32.309

역함수 이 느낌을 보니까
어떤 걸 역함수라고 할까요?

00:23:32.409 --> 00:23:34.717

어떤 함수가 있었어요.

00:23:34.817 --> 00:23:39.767

그때 거꾸로 가는 것이 함수가
될 수 있는가라는 거를 보려고

00:23:39.867 --> 00:23:40.958

하는 거거든요.

00:23:41.058 --> 00:23:46.078

그런데 아까 합성함수 같은 경우는
두 함수가 집합만 잘,

00:23:46.178 --> 00:23:50.682

먼저 붙이는 것의 공역과
두 번째 붙이는 것의 정의역만

00:23:50.782 --> 00:23:52.092

잘 연결된다면.

00:23:52.192 --> 00:23:54.461

그러니까 치역이 그거의
부분집합이 된다고 한다면

00:23:54.561 --> 00:23:57.670

정의역의 부분집합이 되면
함수로써 잘 정의가 되었는데

00:23:57.770 --> 00:24:01.567

역함수는 거꾸로 가려고 보니까

이런 경우는 함수가 안 돼요.

00:24:01.667 --> 00:24:05.859

그러면 언제 이것처럼 예쁘게
함수가 될 수 있을까요?

00:24:05.959 --> 00:24:10.076

앞에 우리가 배웠던 함수의 종류
중에서 어떤 종류의 함수는

00:24:10.176 --> 00:24:12.124

반드시 역함수를 갖는다.

00:24:12.224 --> 00:24:16.656

그런데 그 종류의 함수가
아니라면 역함수가 없다고

00:24:16.756 --> 00:24:18.785

말을 할 수 있는 함수.

00:24:18.885 --> 00:24:24.400

역함수를 갖는 함수는 함수의 종류상
어떤 함수라고 할 수 있을까요?

00:24:24.500 --> 00:24:25.973

예상이 되시나요?

00:24:26.073 --> 00:24:33.067

만약에 제가 이런 예를
3개를 그려드려 볼게요.

00:24:33.167 --> 00:24:35.758

여기 1, 2, 3이 있고요.

00:24:35.858 --> 00:24:37.919

여기 4, 5, 6이 있습니다.

00:24:38.019 --> 00:24:41.678

1, 2, 3, 4, 5, 6.

00:24:41.778 --> 00:24:45.124

그다음에 여기 4, 5, 6,
7 하나 더 붙여 볼까요?

00:24:45.224 --> 00:24:46.734

이거를 Z로 이름 바꾸고.

00:24:46.834 --> 00:24:49.785

이렇게 쓰다 보니까 앞에
이거 어디에선가 이런 상황을

00:24:49.885 --> 00:24:52.981

봤던 것 같은데라는
생각이 좀 드시죠?

00:24:53.081 --> 00:24:56.222

여기까지만 보고도 답을 찾은 학생이
있을 수 있을 것 같아요.

00:24:56.322 --> 00:24:58.499

만약에 이렇게 대응이 됐다.

00:24:58.599 --> 00:25:01.204

이거는 이런 식으로
대응이 되었어요.

00:25:01.304 --> 00:25:03.281

애는 이렇게 대응이 되었어요.

00:25:03.381 --> 00:25:08.145

이중에서 거꾸로 대응시켜주는 것이
함수가 되는 것은 무엇일까요?

00:25:08.245 --> 00:25:13.506

여기에서 거꾸로 가려고 한다면
4에서 화살표가 2개가 됩니다.

00:25:13.606 --> 00:25:20.092

4는 2개의 X 의
값으로 대응이 돼요.

00:25:20.192 --> 00:25:25.410

그렇기 때문에 Y 에서 X 로 이
연결관계를 그대로 가지고

00:25:25.510 --> 00:25:30.623

거꾸로 대응을 시켜주는 이것은
함수가 된다고 할 수가 없어요.

00:25:30.723 --> 00:25:34.824

애는 거꾸로 대응을 시켜주려고
이 핑크색 선을 따라서

00:25:34.924 --> 00:25:38.862

그대로 거꾸로 가서 대응을
시키려고 보니까 이렇게 가는 것이

00:25:38.962 --> 00:25:40.559

함수가 될 수 있을까요?

00:25:40.659 --> 00:25:47.625

7에 대응하는 X 의 값이 없죠.

00:25:47.725 --> 00:25:52.784

그렇기 때문에 함수의 정의를
만족시켜주지 못합니다.

00:25:52.884 --> 00:25:58.346

함수는 X 의 정의역의 각 원소가
공역으로 하나씩 대응이 되어야 되는데

00:25:58.446 --> 00:26:00.119

7에 대응되는 게 없으니까.

00:26:00.219 --> 00:26:01.504

이거는 가능해요.

00:26:01.604 --> 00:26:04.223

모든 X 빠짐없이
하나씩 가고 있어요.

00:26:04.323 --> 00:26:06.904

애네들의 차이점, 이것이 뭐였죠?

00:26:07.004 --> 00:26:09.495

바로 일대일 대응입니다.

00:26:09.595 --> 00:26:12.960

일대일 함수로도 충분히
하지 않은 거예요.

00:26:13.060 --> 00:26:15.174

일대일 함수는 비어
있는 것이 있어요.

00:26:15.274 --> 00:26:17.904

일대일 대응이 아닌 일대일
함수는 공역과 치역이

00:26:18.004 --> 00:26:21.287

일치하지 않기 때문에
공역에서 치역으로 대응,

00:26:21.387 --> 00:26:24.812

정의역의 각 원소로 대응하지
못하는 애들이 생기게 되고.

00:26:24.912 --> 00:26:27.868

일대일이 아니라고 한다면 화살표
이쪽에서 2개 가게 되니까

00:26:27.968 --> 00:26:29.253

안 되는 것이죠.

00:26:29.353 --> 00:26:34.070

그래서 역함수는 만약 원래 함수가
일대일 대응이었다고 한다면

00:26:34.170 --> 00:26:37.838

그 역으로 가는 것을 함수로
정의해줄 수가 있는 거예요.

00:26:37.938 --> 00:26:44.573

그래서 함수 f , X 에서 Y 로 가는
이 함수가 X 에서 Y 로는 뭐이면?

00:26:44.673 --> 00:26:50.197

바로 일대일 대응이라고 한다면
 Y 의 각 원소 y 에 대해서

00:26:50.297 --> 00:26:56.648

$y=f(x)$ 가 되도록 하는 X 의 원소
 x 가 오직 하나만 나오게 되죠.

00:26:56.748 --> 00:27:02.076

각 원소에 대해서, Y 의 각 원소가
모두 다 화살표를 받았어요.

00:27:02.176 --> 00:27:14.222

치역과 공역이 같았기 때문에 모든
 y 에 대응된 X 의 원소가 존재하고요.

00:27:14.322 --> 00:27:17.857

일대일이었기 때문에 오직 하나.

00:27:17.957 --> 00:27:21.361

일대일 함수였으니까,
일대일대응이니까 오직 하나로

00:27:21.461 --> 00:27:26.064

각 원소에 대해서 다
정의가 된다는 거죠.

00:27:26.164 --> 00:27:32.595

그래서 Y 의 각 원소 y 에 $y=f(x)$ 가
되도록 하는 그 X 의 원소 x 를 거꾸로,

00:27:32.695 --> 00:27:37.780

화살표 거꾸로 따라가면서
대응시킴으로써 Y 가 정의역이고,

00:27:37.880 --> 00:27:41.410

X 가 공역인 새로운 함수를
정의할 수 있다는 거예요.

00:27:41.510 --> 00:27:44.561

이 새로운 함수를 f 의
역함수라고 부르겠습니다.

00:27:44.661 --> 00:27:46.824

그리고 기호로 어떻게 나타내느냐.

00:27:46.924 --> 00:27:52.661

f 에다 이렇게 위에 -1 처럼 기호를
올려서 나타내주게 될 거예요.

00:27:52.761 --> 00:27:58.281

그러면 아까 이 상황에서 g 는 우리가
역함수를 정의해줄 수 있는 거예요.

00:27:58.381 --> 00:28:02.055

Z 에서 Y 로 가는 g 의
역함수를 만들어줄 수가 있고.

00:28:02.155 --> 00:28:06.001

이 g 의 역함수에다 런던을
넣은 것은 무엇이 되나요?

00:28:06.101 --> 00:28:09.354

바로 영국이 된다고 찾을
수 있는 함수가 되죠.

00:28:09.454 --> 00:28:11.569

g 가 일대일대응이에요.

00:28:11.669 --> 00:28:17.895

그러면 g 의 역함수도 당연히 1:1
대응으로 나올 수밖에 없겠죠.

00:28:17.995 --> 00:28:20.860

왔다 갔다 똑같은 화살표를
공유하고 있어요.

00:28:20.960 --> 00:28:23.590

대응되는 관계 모양
자체가 똑같습니다.

00:28:23.690 --> 00:28:27.819
순서만 이쪽으로 갔던 걸 역행해서
간다고 되는 것이기 때문에

00:28:27.919 --> 00:28:32.087
모양 똑같이 나오게 되고, 원래
함수를 통해서 역함수의 값을

00:28:32.187 --> 00:28:33.440
찾을 수가 있어요.

00:28:33.540 --> 00:28:37.332
그리고 역함수의 값을 통해서 원래
함수의 값을 알아볼 수도 있겠죠.

00:28:37.432 --> 00:28:42.037
X하고 Y하고 위치만 바뀐
것이기에 때문에 우리가 충분히

00:28:42.137 --> 00:28:43.922
왔다 갔다 할 수 있습니다.

00:28:44.022 --> 00:28:45.460
제대로 정의해 볼게요.

00:28:45.560 --> 00:28:50.755
함수 X에서 Y로 가는 것이 X에서
Y로 가는 일대일대응일 때

00:28:50.855 --> 00:28:53.202
f의 역함수가 존재한다.

00:28:53.302 --> 00:28:58.917
일대일대응이라면 역함수 표시를
이렇게 -1 붙여서 해주고,

00:28:59.017 --> 00:29:00.617
애랑 어떻게?

00:29:00.717 --> 00:29:03.034
애의 정의역이 공역으로 가고요.

00:29:03.134 --> 00:29:07.138
원래 함수의 공역이
정의역으로 왔습니다.

00:29:07.238 --> 00:29:13.553
 $y=f(x)$ 였다고 한다면 이 x의
값이 뭐로 튀어나오게 되느냐.

00:29:13.653 --> 00:29:17.899
f의 역함수에다 y를 대입했을
때 x가 나온다는 거예요.

00:29:17.999 --> 00:29:21.594
y, x 이렇게 되어 있어서
좀 헷갈려 할 수도 있어요.

00:29:21.694 --> 00:29:26.932

무슨 상황이나면 만약에 a 라는
것은 f 에 의해서 b 가 됐어요.

00:29:27.032 --> 00:29:32.101

그렇다면 역함수에 의해서
 b 가 어디로 가는 거죠?

00:29:32.201 --> 00:29:34.166

바로 a 로 간다는 뜻입니다.

00:29:34.266 --> 00:29:37.210

a 가 b 로 갔었어요,
역함수에 의해서.

00:29:37.310 --> 00:29:43.045

원래 함수에 의해서 a 라는
것이 b 로 대응이 됐었습니다.

00:29:43.145 --> 00:29:47.600

그렇다면 거꾸로 가는
역함수로 생각을 했을 때

00:29:47.700 --> 00:29:51.841

역함수에 의해서는 이 화살표
순서만 달리 해서 가는 것이니까

00:29:51.941 --> 00:29:56.201

역함수에 의해 b 는 a 로 대응이
된다고 하는 것이고요.

00:29:56.301 --> 00:29:59.411

만약에 역함수가 b 를
 a 로 대응시켰다.

00:29:59.511 --> 00:30:02.734

그러면 원래 함수는 a 를
 b 로 대응시키게 된다는

00:30:02.834 --> 00:30:05.865

이게 역함수의 기본적인
원리, 방법,

00:30:05.965 --> 00:30:09.426

그리고 앞으로 우리가 역함수에
의한 함수값을 구할 때

00:30:09.526 --> 00:30:11.202

사용하게 될 성질이에요.

00:30:11.302 --> 00:30:12.717

이거를 반드시 기억을 하세요.

00:30:12.817 --> 00:30:14.129

기억을 할 필요도 없죠, 사실.

00:30:14.229 --> 00:30:18.218

역함수의 정의니까 a 가 b 였으면
 b 를 역함수에 넣은 게

00:30:18.318 --> 00:30:19.990

a가 된다는 거고요.

00:30:20.090 --> 00:30:24.257

그래서 이거를 응용하면 이제
우리가 일대일 대응일 때

00:30:24.357 --> 00:30:25.673

역함수가 존재하는 거였죠.

00:30:25.773 --> 00:30:28.793

그리고 역함수가 존재한다는
것은 일대일 대응이라는 것이라고

00:30:28.893 --> 00:30:30.137

할 수밖에 없습니다.

00:30:30.237 --> 00:30:34.324

안 그러면 역함수가 함수로써
대응되지 않는다는 게

00:30:34.424 --> 00:30:36.753

너무 명백하게 우리가
예를 통해서 봤잖아요.

00:30:36.853 --> 00:30:40.787

그래서 역함수가 존재하다는
문장이 문제에 만약에 나왔어요.

00:30:40.887 --> 00:30:42.406

그러면 바로 일대일 대응이구나.

00:30:42.506 --> 00:30:45.997

일대일 대응이라는 뜻은 서로 다른
X가 서로 다른 Y로 간다.

00:30:46.097 --> 00:30:48.785

그리고 치역과 공역이
같다고 알아보시면 돼요.

00:30:48.885 --> 00:30:50.555

치역과 공역이 같다는 뜻이죠.

00:30:50.655 --> 00:30:54.102

그리고 임의의 어떤
정의역의 원소에 대해서

00:30:54.202 --> 00:30:57.583

$f(x_1)$ 과 $f(x_2)$ 가
서로 같았었다.

00:30:57.683 --> 00:31:01.990

그렇다고 한다면, y값이 서로 같으면
x의 값이 서로 같다는 것이

00:31:02.090 --> 00:31:04.031

성립한다는 뜻입니다.

00:31:04.131 --> 00:31:06.184

이게 일대일 대응의 정의였어요.

00:31:06.284 --> 00:31:10.457

그래서 이렇게 3개가 다 같은
말이라고 알아두시면 돼요.

00:31:10.557 --> 00:31:14.272
역함수 존재한다, 일대일 대응이다,
치역과 공역이 같고

00:31:14.372 --> 00:31:17.597
정의역의 임의의 원소에 대해서
 y 가 같을 때 x 가 서로 같다.

00:31:17.697 --> 00:31:21.791
또는 x 가 다를 때 y 값이 서로
다르다고 대우명제를 이용해서

00:31:21.891 --> 00:31:23.040
쓰기도 했었죠.

00:31:23.140 --> 00:31:25.375
그림으로 나타내 보면 이렇게입니다.

00:31:25.475 --> 00:31:28.412
 f 에 의해서 x 가 y 로 갔어요.

00:31:28.512 --> 00:31:30.469
그리고 이 y 가 $f(x)$ 였어요.

00:31:30.569 --> 00:31:33.365
그러면 역함수에 의해서는
 y 가 x 로 오게 되는 거죠.

00:31:33.465 --> 00:31:36.178
다시 써볼게요.

00:31:36.278 --> 00:31:41.899
 x 가 f 에 의해서 y 로 왔어요.

00:31:41.999 --> 00:31:45.374
그러면 역함수에 의해서
 y 는 x 로 가게 되죠.

00:31:45.474 --> 00:31:49.539
 x , y 가 일반적인 기호를
나타내는 것 같아서 헷갈리신다면

00:31:49.639 --> 00:31:51.575
 a , b 로 보시면 좀
더 낫다고 했어요.

00:31:51.675 --> 00:31:53.266
 b 가 $f(a)$ 예요.

00:31:53.366 --> 00:31:56.150
역함수에 의해서 b 는 a 로 갑니다.

00:31:56.250 --> 00:32:02.013
그러면 이 역함수의 값을 여기다가
넣었다고 생각을 해볼게요.

00:32:02.113 --> 00:32:06.602
이렇게 f 역함수 b 의 값을

다시 f 에다 넣었습니다.

00:32:06.702 --> 00:32:09.723

그러면 이거는 $f(a)$ 와
같아지게 되죠.

00:32:09.823 --> 00:32:11.642

그런데 $f(a)$ 가 얼마라고 했죠?

00:32:11.742 --> 00:32:13.139

b 라고 했어요.

00:32:13.239 --> 00:32:18.026

그러면 f 의 역함수랑 f 를
합성한 것에다 b 를 넣은 결과

00:32:18.126 --> 00:32:19.565

뭐가 나오게 되죠?

00:32:19.665 --> 00:32:20.976

바로 b 가 나오게 돼요.

00:32:21.076 --> 00:32:25.658

마찬가지로 $f(a)$ 에다 f 의
역함수 이렇게 해서 넣었어요.

00:32:25.758 --> 00:32:27.048

이게 b 죠.

00:32:27.148 --> 00:32:30.781

그런데 f 의 역함수에 b 를 넣으면
 a 가 나온다고 했거든요.

00:32:30.881 --> 00:32:32.887

넣은 것 그대로 나오게 돼요.

00:32:32.987 --> 00:32:36.763

역함수하고 원래 함수하고를
합성하게 되면 그냥 넣은 거

00:32:36.863 --> 00:32:40.614

그대로 나오게 되는 항등함수로
그렇게 나올 수밖에 없습니다.

00:32:40.714 --> 00:32:42.202

왔다 갔다 하는 거니까.

00:32:42.302 --> 00:32:43.693

이게 어떻게 된 거냐.

00:32:43.793 --> 00:32:46.281

합성했다는 것은 여기다가
 f 적용시켰어요.

00:32:46.381 --> 00:32:48.300

f 역함수 적용시켜서 다시 해요.

00:32:48.400 --> 00:32:49.645

그러면 원래대로 돌아온다.

00:32:49.745 --> 00:32:53.089

여기에서 출발해서 f 적용하고
 f 역함수 적용하면 원래대로.

00:32:53.189 --> 00:32:58.522
여기에서 출발해서 f 의 역함수
적용하고 f 적용했으면 또 원래대로.

00:32:58.622 --> 00:33:00.980
그렇게 돌아올 수밖에 없다는 거죠.

00:33:01.080 --> 00:33:03.156
이게 역함수의 일종의 성질입니다.

00:33:03.256 --> 00:33:05.475
그래서 이따가 이 성질은
정리를 해보고.

00:33:05.575 --> 00:33:08.094
그다음에 이 문제들을
풀면서 역함수에는

00:33:08.194 --> 00:33:11.990
이런 성질이 있겠구나라는
것을 조금 더 살펴본 다음에

00:33:12.090 --> 00:33:13.577
정리를 해보도록 할게요.

00:33:13.677 --> 00:33:19.187
 f 가 X 에서 Y 로 가는
일대일대응으로 잘 보이시죠?

00:33:19.287 --> 00:33:23.107
이랬을 때 f 의 역함수에다
 b 를 넣은 것.

00:33:23.207 --> 00:33:26.206
역함수가 정의가 됩니다,
일대일대응이니까.

00:33:26.306 --> 00:33:29.840
그러면 f 의 역함수에 b 를
넣은 것을 구하라는 것은

00:33:29.940 --> 00:33:31.974
누가 b 로 오게 되었느냐.

00:33:32.074 --> 00:33:34.125
거꾸로 갔을 때 어디로
대응될 것이냐.

00:33:34.225 --> 00:33:36.048
바로 4로 대응이 되는 거죠.

00:33:36.148 --> 00:33:39.528
이게 나올 수 있는 이유,
 $f(4)$ 가 b 라는 거예요.

00:33:39.628 --> 00:33:43.848
그리고 일대일대응이었으니까
 b 로 온 것은 4밖에 없어요.

00:33:43.948 --> 00:33:47.523

그렇기 때문에 f 역함수에 b 를
넣은 건 유일하게 딱 4가 된다.

00:33:47.623 --> 00:33:49.979

함숫값으로 찾을 수
있다고 나온 거고요.

00:33:50.079 --> 00:33:52.878

이번에 f 에다 2를 넣었어요.

00:33:52.978 --> 00:33:56.212

그러면 f 역함수에다
 $f(2)$ 를 넣게 되는데.

00:33:56.312 --> 00:33:58.158

$f(2)$ 의 값이 c 죠.

00:33:58.258 --> 00:34:00.770

그러면 f 역함수에다 c 를
넣으면 뭐가 되나요?

00:34:00.870 --> 00:34:02.726

c 는 어디에서부터 왔죠?

00:34:02.826 --> 00:34:04.447

2로부터 왔습니다.

00:34:04.547 --> 00:34:07.119

2 넣으면 그대로 2가
나오게 된다는 거예요.

00:34:07.219 --> 00:34:09.580

이번에는 역함수에다 d 를 넣었어요.

00:34:09.680 --> 00:34:12.356

그러면 d 를 넣었을 때
3으로 가게 되죠.

00:34:12.456 --> 00:34:16.903

$f(f \text{ 역함수}(d))$ 를 하게
되면 이거는 $f(3)$ 이에요.

00:34:17.003 --> 00:34:18.564

그런데 $f(3)$ 은 얼마예요?

00:34:18.664 --> 00:34:20.260

다시 뒤로 돌아갈 수밖에 없죠.

00:34:20.360 --> 00:34:25.167

합성함수 d 먼저 적용하고 다시 이거를
 f 에 의해서 오도록 하는 거니까

00:34:25.267 --> 00:34:26.741

그냥 d 가 되는 거예요.

00:34:26.841 --> 00:34:28.340

d 가 d 로 나왔습니다.

00:34:28.440 --> 00:34:30.088

그러면 이렇게 된
거는 어떻게 될까요?

00:34:30.188 --> 00:34:32.622

이거 하나하나한
일이라는 거 알겠어요?

00:34:32.722 --> 00:34:36.725

원래 거 그대로 나오도록 하는 것이니까
그냥 $f(3)$ 만 구해주면 됩니다.

00:34:36.825 --> 00:34:38.296

그래서 d 로 나오게 돼요.

00:34:38.396 --> 00:34:39.553

궁금하면 해보세요.

00:34:39.653 --> 00:34:41.038

$f(3)$ 에 의해서 보냈어요.

00:34:41.138 --> 00:34:42.769

다시 역함수에 의해서 보내요.

00:34:42.869 --> 00:34:44.624

다시 f 에 의해서 보내요.

00:34:44.724 --> 00:34:47.201

당연히 d 가 될 수밖에 없겠죠.

00:34:47.301 --> 00:34:50.196

그래서 이런 역함수의
성질을 보도록 할게요.

00:34:50.296 --> 00:34:53.783

f 하고 g 하고 일대일대응일 때.

00:34:53.883 --> 00:34:57.345

당연히 일대일대응이어야지만 각각
역함수가 존재할 수 있기 때문에

00:34:57.445 --> 00:35:00.062

이렇게 일대일대응이라고
한정지어 볼게요.

00:35:00.162 --> 00:35:03.144

그랬을 때 f 의 역함수의
역함수를 구한다.

00:35:03.244 --> 00:35:06.172

역함수의 역함수라는
것은 이렇게 간 다음에

00:35:06.272 --> 00:35:07.770

다시 돌리도록 한다는 거죠.

00:35:07.870 --> 00:35:11.242

그러니까 그 역함수를 다시 거꾸로
했을 때는 무엇이 될 것이냐.

00:35:11.342 --> 00:35:13.544

당연히 원래 함수 그대로

나오게 될 거예요.

00:35:13.644 --> 00:35:17.537

우리 항상 마이너스의
마이너스는 플러스.

00:35:17.637 --> 00:35:21.049

여집합의 여집합은 원래
집합 그렇게 됐던 것처럼

00:35:21.149 --> 00:35:22.902

역함수의 역함수는 원래대로.

00:35:23.002 --> 00:35:26.443

이번에는 f 하고 f 역함수를
이렇게 합성을 했어요.

00:35:26.543 --> 00:35:28.546

지금 앞에서 계속 예를
들어서 봤던 내용이죠.

00:35:28.646 --> 00:35:29.909

항등함수가 나오는데.

00:35:30.009 --> 00:35:33.631

f 에서 출발했으면 x 에서 정의된
항등함수가 나오게 돼요.

00:35:33.731 --> 00:35:38.523

무슨 뜻이냐면 아까 여기에서
 f 하고 f 의 역함수하고

00:35:38.623 --> 00:35:43.625

이렇게 합성해서 x 를 구한다고
한다면 애는 정의가 어디에서

00:35:43.725 --> 00:35:47.058

되어 있냐면 f 역함수가
 Y 에서 X 로 가잖아요.

00:35:47.158 --> 00:35:49.366

f 가 X 에서 Y 로 가죠.

00:35:49.466 --> 00:35:55.177

그러면 f 의 역함수랑 f 를 합성한 것은
 Y 에서 출발해서 Y 로 가게 돼요.

00:35:55.277 --> 00:35:58.557

그래서 a 대입하면 a 나오고,
 b 대입하면 b 나오고,

00:35:58.657 --> 00:36:01.608

c 대입하면 c 나오고, d 대입하면
 d 나오는 그런 함수가 되고.

00:36:01.708 --> 00:36:05.597

그다음에 f 의 역함수랑 f 를
이 순서대로 합성을 했다면

00:36:05.697 --> 00:36:10.779

f 는 X 에서 Y 로 가고, f 의 역함수는

Y에서 X로 가게 되기 때문에

00:36:10.879 --> 00:36:14.589

f 먼저 합성하고 그다음에
f의 역함수를 합성해준 건

00:36:14.689 --> 00:36:16.626

X에서 X로 가는 함수죠.

00:36:16.726 --> 00:36:18.313

둘 다 항등인 건 맞는데.

00:36:18.413 --> 00:36:22.140

정의되어 있는 정의역과
공역이 서로 다르게 되어서

00:36:22.240 --> 00:36:24.006

좀 구분해서 써준 거예요.

00:36:24.106 --> 00:36:29.034

그래서 어쨌든 항등함수가 나오게
되는데 애는 X에서 출발했으니까

00:36:29.134 --> 00:36:30.848

X에서 정의된 항등함수.

00:36:30.948 --> 00:36:34.259

이거는 Y에서 출발했으니까
Y에서 정의된 항등함수인데

00:36:34.359 --> 00:36:35.624

중요한 내용은 아니에요.

00:36:35.724 --> 00:36:37.245

그냥 똑같다는 거.

00:36:37.345 --> 00:36:39.111

그냥 같다고 아시면 돼요.

00:36:39.211 --> 00:36:41.889

그런데 이제 제가 여기다 쓸
때 수학이 이래서 어려워요.

00:36:41.989 --> 00:36:43.305

엄밀하게 적어야 되잖아요.

00:36:43.405 --> 00:36:47.997

이렇게 잘못 쓰면 오류 났다고, 특히
우리나라 수학 굉장히 무섭습니다.

00:36:48.097 --> 00:36:51.596

조금만 이렇게 엄밀성이
떨어져도 이거 오류예요,

00:36:51.696 --> 00:36:53.757

막 이러면서 그런 식으로
나오게 되기 때문에

00:36:53.857 --> 00:36:58.146

그냥 직관적으로 느낌상
알고 그러네라고 넘어가면

00:36:58.246 --> 00:37:01.552
참 여러분에게 수학이 쉬울 텐데 이런
것이 좀 어려운 부분이기도 하고.

00:37:01.652 --> 00:37:05.918
그렇기 때문에 수학 공부를 열심히
하면 항상 굉장히 빈틈없이

00:37:06.018 --> 00:37:09.361
생각할 수 있는 완벽주의적인 그런
거를 좀 가질 수가 있게 되죠.

00:37:09.461 --> 00:37:12.575
그래서 항등함수입니다.

00:37:12.675 --> 00:37:14.212
다 같은 결과로 나오게 되고요.

00:37:14.312 --> 00:37:16.061
이번에는 이런 걸 한번 해볼게요.

00:37:16.161 --> 00:37:19.315
g하고 f하고 합성했더니
항등함수가 나왔어요.

00:37:19.415 --> 00:37:23.805
그러면 g하고 f하고
합성을 해서 항등함수,

00:37:23.905 --> 00:37:26.006
x에서 정의된 항등함수가 나왔다.

00:37:26.106 --> 00:37:29.903
f는 x에서 출발하는 거였고
저기 제가 전제해 놓은 거 보면

00:37:30.003 --> 00:37:33.854
g는 y에서 출발하는 거니까 이렇게
합성해서 X에서 X로 가는

00:37:33.954 --> 00:37:39.161
항등함수가 나왔다고 한다면
여기에 양쪽에다 우리가 지금

00:37:39.261 --> 00:37:43.912
둘 다 일대일대응이니까
역함수가 존재한다고 했잖아요.

00:37:44.012 --> 00:37:47.704
이거 g의 역함수를 합성했다고
생각을 해보겠습니다.

00:37:47.804 --> 00:37:53.104
합성함수는 순서가 잘
따져줘야 되니까 같은 쪽에다

00:37:53.204 --> 00:37:55.326
이렇게 합성을 해주는 것이 좋겠죠.

00:37:55.426 --> 00:37:59.661

그러면 결합법칙 성립하면서 g 의 역함수 합성 g 가 나오게 되고,

00:37:59.761 --> 00:38:03.423
그다음에 f 이렇게 나오고,
항등함수랑 합성했기 때문에

00:38:03.523 --> 00:38:05.076
 g 의 역함수가 나와요.

00:38:05.176 --> 00:38:06.870
그러면 f 는 뭐랑 같아지나요?

00:38:06.970 --> 00:38:09.958
 g 의 역함수랑 같다는
것을 알 수가 있습니다.

00:38:10.058 --> 00:38:16.229
그리고 여기에다 이번에는 오른쪽에
 f 의 역함수를 합성했다고

00:38:16.329 --> 00:38:20.444
생각을 해보면 마찬가지로 어떤
결과가 나올 수 있겠어요?

00:38:20.544 --> 00:38:25.540
여기 오른쪽에 f 의 역함수
합성하면 애는 항등이 되면서

00:38:25.640 --> 00:38:28.706
좌변이 g 가 나오고, 우변은
항등함수랑 합성하면

00:38:28.806 --> 00:38:33.433
그냥 자기 자신 나오게 되니까 이렇게
 f 의 역함수로 나오게 되겠죠.

00:38:33.533 --> 00:38:40.046
그래서 합성했더니 뭔가 이렇게
항등함수가 나오는 관계가

00:38:40.146 --> 00:38:43.556
있었다고 한다면 서로
역함수의 관계라는 거예요.

00:38:43.656 --> 00:38:48.235
즉, f 하고 f 하고 합성했더니
항등함수가 나왔다.

00:38:48.335 --> 00:38:49.805
즉, 이 뜻입니다.

00:38:49.905 --> 00:38:51.382
일대일대응이예요.

00:38:51.482 --> 00:38:56.551
 f 가 일대일대응인데 $f(x)$ 를
 f 에다 넣었더니 x 가 나왔어요.

00:38:56.651 --> 00:38:58.401
넣은 거 그대로 나왔어요.

00:38:58.501 --> 00:39:00.193
무슨 뜻이라고요?

00:39:00.293 --> 00:39:04.564
 f 가 자기 역함수와 같은
모양을 가진 함수가 됩니다.

00:39:04.664 --> 00:39:09.176
그래서 이거는 가끔 나오는
성질이니깐 이제 보시면 되겠고요.

00:39:09.276 --> 00:39:12.248
그다음에 애, 이거는 중요하죠.

00:39:12.348 --> 00:39:16.421
 g 하고 f 하고 합성을 한
다음에 역함수를 취하게 되면

00:39:16.521 --> 00:39:17.746
어떻게 될 것인가.

00:39:17.846 --> 00:39:19.490
어떻게 될 것 같으세요?

00:39:19.590 --> 00:39:23.738
이렇게 될 거 같죠.
이렇게 웬지 될 거 같죠?

00:39:23.838 --> 00:39:25.343
그런데 그렇지 않습니다.

00:39:25.443 --> 00:39:28.661
어떻게 되냐면 f 하고
 g 하고를 합성한다고 했어요.

00:39:28.761 --> 00:39:30.893
 f 먼저 합성했죠.

00:39:30.993 --> 00:39:34.871
 f 로 먼저 보내고
그다음에 g 로 보내요.

00:39:34.971 --> 00:39:43.618
그래서 이렇게 어떤 x 가 있을 때 $f(x)$
그다음에 $g(f(x))$ 이렇게 갔어요.

00:39:43.718 --> 00:39:46.701
합성한 것의 그러면
역함수를 가도록 하려면

00:39:46.801 --> 00:39:48.256
출발을 어디부터 해야 되죠?

00:39:48.356 --> 00:39:50.161
 g 부터 가 봐야 돼요.

00:39:50.261 --> 00:39:55.795
 g 에 적용시키고 그다음에 f 를
적용시켜야지만 합성한 걸 볼 수 있어요.

00:39:55.895 --> 00:40:00.743

f 합성 g에 의해서 x가
만약에 y로 갔다고 했을 때

00:40:00.843 --> 00:40:04.181

그러면 거꾸로 갈 때는 어떤
순서로 가야 될까라는 것을

00:40:04.281 --> 00:40:06.906

보게 된다면 지금 제가
적은 게 이거였죠.

00:40:07.006 --> 00:40:09.755

이거를 어떻게 가게
될 것인가를 보려면

00:40:09.855 --> 00:40:12.795

내가 우리 흔히 하는
예로 그걸 얘기합니다.

00:40:12.895 --> 00:40:16.614

양말 먼저 신고 그다음에
신발을 신었어요.

00:40:16.714 --> 00:40:18.779

벗을 때는 뭐부터 벗어야 되죠?

00:40:18.879 --> 00:40:21.298

신발을 벗고 양말을
벗어야 되는 거죠.

00:40:21.398 --> 00:40:23.690

그래서 순서가 바뀌게 됩니다.

00:40:23.790 --> 00:40:26.952

그래서 먼저 g의
역함수를 적용해주고

00:40:27.052 --> 00:40:29.902

그다음에 f의 역함수를
적용해주게 되는 거예요.

00:40:30.002 --> 00:40:33.861

그래서 이렇게 순서가 바뀐다는
거 조심해서 보세요.

00:40:33.961 --> 00:40:39.286

f 합성 g의 역함수는 g의
역함수 합성 f의 역함수다.

00:40:39.386 --> 00:40:41.143

이 그림 생각하시면 돼요.

00:40:41.243 --> 00:40:46.892

f, g 갔었으니까 거꾸로 올 때는
g, f로 오게 된다는 것입니다.

00:40:46.992 --> 00:40:50.072

신발, 양말 생각하셔도 되고요.

00:40:50.172 --> 00:40:54.039

그러면 이 값을 한번
구해보도록 할게요.

00:40:54.139 --> 00:41:00.053

두 함수 f, g 에 대해서
여기를 좀 정리하고 갈까요?

00:41:00.153 --> 00:41:02.839

g , 우리 그리고 결합법칙
막 다 성립하잖아요.

00:41:02.939 --> 00:41:06.155

그러니까 정리를 그냥 쪽
풀어서 써보겠습니다.

00:41:06.255 --> 00:41:08.541

g 합성 f 의 역함수를 구했어요.

00:41:08.641 --> 00:41:09.852

이거 뭐랑 같아지죠?

00:41:09.952 --> 00:41:14.518

순서 바뀌면서 f 의 역함수
 g 의 역함수 이렇게 되거든요.

00:41:14.618 --> 00:41:16.449

그리고 $g(4)$ 예요.

00:41:16.549 --> 00:41:17.624

그런데 이거 뭐예요?

00:41:17.724 --> 00:41:19.076

항등함수니까 하나마나.

00:41:19.176 --> 00:41:23.477

g 에다 4 넣고 다시 g 의 역함수에
넣었으면 4가 그대로 나오게 되겠죠.

00:41:23.577 --> 00:41:28.966

그래서 이거는 g 합성 f
역함수에 4를 넣은 것과 같아요.

00:41:29.066 --> 00:41:33.062

그러면 g 에다 f 역함수에 4
넣은 거 찾으면 되거든요.

00:41:33.162 --> 00:41:37.758

f 역함수에 4 넣은 거
찾으려면 뭘 찾으면 되죠?

00:41:37.858 --> 00:41:43.481

어떤 값을, f 역함수에 4를
넣은 값이 만약에 k 였다고 한다면

00:41:43.581 --> 00:41:46.849

f 에다 k 를 넣은 것이 4가 돼요.

00:41:46.949 --> 00:41:53.115

그러면 f 에 k 를 넣은 것은 $f(x)$
식이 $x+2$ 니까 $k+2$ 가 되잖아요.

00:41:53.215 --> 00:41:56.309

이게 4가 되도록 하는
k를 찾는 거죠.

00:41:56.409 --> 00:41:59.457

그러면 k의 값은
2로 나오게 됩니다.

00:41:59.557 --> 00:42:01.747

여기의 값이 2예요.

00:42:01.847 --> 00:42:07.122

그럼 f 역함수 4의 값이 2니까
이거는 g(2)를 찾으면 되겠죠.

00:42:07.222 --> 00:42:11.691

g(2)의 값은 $2 \times 2 - 1$
해서 3으로 나오게 됩니다.

00:42:11.791 --> 00:42:16.519

그래서 이거의 결과는 3이 된다고
이렇게 찾을 수가 있어요.

00:42:16.619 --> 00:42:20.015

그 역함수의 성질 이용하니까
의외로 아주 쉽게 풀렸죠.

00:42:20.115 --> 00:42:22.047

애는 좀 어려운 문제예요.

00:42:22.147 --> 00:42:24.429

교과서에서도 좀 심화로
나올 수가 있는데.

00:42:24.529 --> 00:42:26.539

제가 너무 욕심을 부렸네요.

00:42:26.639 --> 00:42:28.860

이 정도까지는 아직은 못해도 되기는
하지만, 그래도 한번 해보겠습니다.

00:42:28.960 --> 00:42:32.901

f, g 이렇게 나왔을 때
h를 구하래요.

00:42:33.001 --> 00:42:37.323

f하고 g의 역함수하고 합성한
것이 f가 나왔거든요.

00:42:37.423 --> 00:42:42.198

그러면 내가 h라는
모양을 끌어내고 싶으면

00:42:42.298 --> 00:42:44.267

양쪽에다 뭘 해보면 될까요?

00:42:44.367 --> 00:42:46.282

뭔가 항등이 되도록
없애주면 되거든요.

00:42:46.382 --> 00:42:49.332

우리가 $3x$ 가 1일 때
 x 만 구하도록 하기 위해서

00:42:49.432 --> 00:42:55.126
양변에 3분의 1 곱한 것처럼 여기다가
 g 를 이렇게 합성을 해주는 거예요.

00:42:55.226 --> 00:43:00.474
그러면 이게 항등함수가 되고,
항등함수는 하나마나라는 거죠.

00:43:00.574 --> 00:43:03.167
넣은 거 그대로
나오니까 있으나마나,

00:43:03.267 --> 00:43:07.894
미용실 가기 전과 후가
똑같은 하나마나한 함수.

00:43:07.994 --> 00:43:09.928
그냥 들어간 그대로
나오는 것이기 때문에

00:43:10.028 --> 00:43:12.276
굳이 고려를 안 해줘도
되는 거예요.

00:43:12.376 --> 00:43:16.010
 h 는 f 하고 g 를 합성한
것과 같습니다.

00:43:16.110 --> 00:43:19.633
그래서 h 를 구한다면 그냥
이 함수를 찾으면 돼요.

00:43:19.733 --> 00:43:21.805
 $h(x)$ 는 무엇과 같냐.

00:43:21.905 --> 00:43:25.631
 f 에다 $g(x)$ 를 넣은
것과 같다는 거죠.

00:43:25.731 --> 00:43:30.860
그래서 h 에서 성립하는 함수
 $h(x)$ 의 관계식을 구한다면

00:43:30.960 --> 00:43:35.263
 f 에다 g 를 넣은
 $2g(x)-1$ 찾으면 되고.

00:43:35.363 --> 00:43:42.195
 $2(x+3)-1$ 로 나오게 되니까
 $2x+5$ 가 된다고 구해줄 수가 있죠.

00:43:42.295 --> 00:43:47.254
이런 식으로 합성을 통해서 뭔가
함수에 대한 방정식이네요.

00:43:47.354 --> 00:43:49.922
 h 라는 것을 찾아내고 싶다.

00:43:50.022 --> 00:43:54.314

적당히 항등함수가 나오도록 적당한
위치에다 조심해야 될 거

00:43:54.414 --> 00:43:57.026

오른쪽에 합성했어요, 좌변에서.

00:43:57.126 --> 00:44:00.622

그러면 우변도 이렇게
오른쪽에다 합성을 해서.

00:44:00.722 --> 00:44:04.545

왜냐하면 합성함수가 교환법칙이
성립하지 않으니까

00:44:04.645 --> 00:44:08.189

여기에 오른쪽에 했다면 여기도
오른쪽에 맞춰서 해서

00:44:08.289 --> 00:44:09.774

이렇게 구해주시면 됩니다.

00:44:09.874 --> 00:44:14.903

그러면 이번에는 역함수가 어떻게
대응이 된다는 거는 알겠는데

00:44:15.003 --> 00:44:19.395

이제 그 함수식이 어떻게 나올지.

00:44:19.495 --> 00:44:23.458

함수식을 찾는 것을 한번
생각을 해보도록 할게요.

00:44:23.558 --> 00:44:27.486

예를 들어서 집합 X 가 1, 2,
3이 3, 4, 5로 갔어요.

00:44:27.586 --> 00:44:31.220

그러면 역함수는 3, 4,
5가 1, 2, 3으로 왔죠.

00:44:31.320 --> 00:44:37.218

그러면 애는 우리가 함수식으로
나타낸다면 $f(x)$ 가 $x+2$ 가 된다고

00:44:37.318 --> 00:44:38.981

할 수가 있거든요.

00:44:39.081 --> 00:44:43.644

그러면 역함수의 함수식을
찾는다는 것은 역의 대응 규칙.

00:44:43.744 --> 00:44:46.100

3을 넣었을 때 원래대로 다시 1.

00:44:46.200 --> 00:44:51.430

거꾸로 가려면 어떤 식을 적용을 해야
되는가를 찾는 것과 마찬가지로요.

00:44:51.530 --> 00:44:54.664

원래 $y=x+2$ 였거든요.

00:44:54.764 --> 00:44:59.659

$y=x+2$ 였는데 역함수에서는
내가 뭘 넣고 싶어요?

00:44:59.759 --> 00:45:05.685

$y=x+2$ 다라고 해서

00:45:05.785 --> 00:45:09.410

1에다 2를 더해서
3이 나오게 되었는데

00:45:09.510 --> 00:45:11.669

내가 넣고 싶은 게
이제 3이잖아요.

00:45:11.769 --> 00:45:15.181

3에다 어떤 연산을 해야지만
1이 나오게 될 것인가

00:45:15.281 --> 00:45:16.901

그거를 찾고 싶은 거예요.

00:45:17.001 --> 00:45:20.759

여기 y 값에 대해서 y 값에
어떤 조작을 해야 x 가

00:45:20.859 --> 00:45:22.550

나오게 될 것인가라는 거거든요.

00:45:22.650 --> 00:45:23.606

다시 들어보세요.

00:45:23.706 --> 00:45:28.924

y 에 어떤 조작을 해야 x 가 나올
것인가라는 것을 찾는 것이니까

00:45:29.024 --> 00:45:33.114

이 식을 x 에 대해서
정리를 해주어야 돼요.

00:45:33.214 --> 00:45:37.779

x 는 무슨 y 다라고
식을 정리하자는 거죠.

00:45:37.879 --> 00:45:39.776

그러면 $x=y-2$.

00:45:39.876 --> 00:45:42.843

이거 사실 여러분 보자마자
이거 식 간단하니까 아셨죠?

00:45:42.943 --> 00:45:47.369

x 를 구하려면 y 를 넣어서
 x 가 딱 튀어나오도록 하려면

00:45:47.469 --> 00:45:51.087

y 에다 2를 빼주면 된다고
나오게 된다는 거죠.

00:45:51.187 --> 00:45:55.592

그래서 y 가 들어갈 때마다
딱 x 가 하나의 값으로

00:45:55.692 --> 00:45:57.413
결정이 되도록 하고 싶어.

00:45:57.513 --> 00:46:02.197
원래는 함수가 x 가 들어갈 때마다
 y 가 하나로 나오게 하고 싶어라는

00:46:02.297 --> 00:46:09.359
차원에서 여기 이 함수 기계에다
 x 를 넣었을 때 이 f 를 거쳐서

00:46:09.459 --> 00:46:11.292
무슨 y 가 나오게 된다.

00:46:11.392 --> 00:46:14.040
 $f(x)$ 라는 과정을 거쳐서
 y 가 나오도록 했다면

00:46:14.140 --> 00:46:19.027
이 y 를 이제 거꾸로 여기에다
넣어서 x 를 찾도록 하기 위해서는

00:46:19.127 --> 00:46:25.478
 x 가 무슨 y 냐라고 이렇게 y 에
대해서 성립하게 되는 식의 형태가

00:46:25.578 --> 00:46:27.613
어떤 식인가를 구하고자
하는 거예요.

00:46:27.713 --> 00:46:30.595
그렇기 때문에 x 에
대해서 식을 풀고,

00:46:30.695 --> 00:46:35.782
그다음에 우리 원래 그래도 함수 식은
보통 y 는 무슨 x 이렇게 쓰잖아요.

00:46:35.882 --> 00:46:40.250
그렇기 때문에 애를 x 는
 f 역함수 y 라고 썼지만

00:46:40.350 --> 00:46:44.947
다시 y 는 f 역함수 x 가
이런 거다라고 x, y .

00:46:45.047 --> 00:46:49.786
 x 가 독립변수, x 좌표에
쓰는 거, y 종속변수,

00:46:49.886 --> 00:46:53.568
 y 축에 그 값을 표시하는
거로 나타내 주려고 한다면

00:46:53.668 --> 00:46:58.545
 x, y 의 자리를 바꾸어서 보기
좋게 표현을 해주면 되는 거죠.

00:46:58.645 --> 00:47:03.246

$y=x-2$ 가 나오게 되고,
역함수의 식이 $x-2$ 가 됩니다.

00:47:03.346 --> 00:47:05.554

그러면 정말 제대로
찾은 거 맞나요?

00:47:05.654 --> 00:47:08.400

역함수에 3 넣으니깐 1 나왔고요.

00:47:08.500 --> 00:47:11.254

4 넣으니깐 2 나오고요,
5 넣으니깐 3 나오고.

00:47:11.354 --> 00:47:13.107

제대로 식 찾은 게 맞죠.

00:47:13.207 --> 00:47:15.918

그래서 역함수를 구하는
일반적인 방법을 본다면

00:47:16.018 --> 00:47:18.670

일단 일대일 대응인지
확인을 해야 돼요.

00:47:18.770 --> 00:47:23.116

공역이 만약에 없다 그러면 공역이랑
치역이랑 같다고 간주하셔도 돼요.

00:47:23.216 --> 00:47:28.567

그래서 일대일, 모양이 일대일로 잘
대응되는지만 확인하시면 되고요.

00:47:28.667 --> 00:47:31.967

그래서 역함수가 존재한다는 걸
확인한 다음에 $f(x)$ 를

00:47:32.067 --> 00:47:33.548

누구에 대한 식으로?

00:47:33.648 --> 00:47:38.363

x 에 대한 식으로 풀어서 x 는
무슨 y 의 형태로 바꾸자는 거죠.

00:47:38.463 --> 00:47:43.870

이때 편하게 이걸 고치려면 애를
마치 y 를 상수로 간주하고

00:47:43.970 --> 00:47:48.321

x 의 값을 찾아내는 거니까
 x 에 대한 방정식을 푼다고

00:47:48.421 --> 00:47:49.879

생각을 해주시면 됩니다.

00:47:49.979 --> 00:47:54.254

그러고 나서 x 는 무슨 y 되어
있는 것에서 y 랑 x 랑 자리를

00:47:54.354 --> 00:47:58.910

바꾸기만 해서 일반적인 함수
형태의 식으로 써주는 거죠.

00:47:59.010 --> 00:48:05.144
그럴 때 원래 함수의 치역이 새로운
그 역함수의 정의역이 될 거고요.

00:48:05.244 --> 00:48:10.514
원래 함수의 정의역이 새로운 함수의
이제 치역으로 나오게 되겠죠.

00:48:10.614 --> 00:48:12.573
정의역과 치역이 서로
바뀌게 되겠죠.

00:48:12.673 --> 00:48:18.534
그런데 f 의 역함수의 정의역이 모든
실수의 집합이 아니게 되는 경우에는

00:48:18.634 --> 00:48:20.537
정의역을 명시해주는 것이 좋아요.

00:48:20.637 --> 00:48:22.848
예를 들어서 우리 아직
안 배운 함수인데

00:48:22.948 --> 00:48:25.423
이런 게 어떤 상황에
나오는지를 적어 드리자면

00:48:25.523 --> 00:48:30.999
 $y=\sqrt{x}$ 라는 함수 이것도 x 하나 대응될
때 y 가 나오게 되는 함수예요.

00:48:31.099 --> 00:48:34.395
이거의 역함수를 구한다고
생각을 해볼게요.

00:48:34.495 --> 00:48:37.026
애가 실숫값을 가져야 돼요.

00:48:37.126 --> 00:48:40.425
일단 이 함수 우리 뒤에서
28강에 배우게 될 무리함수인데

00:48:40.525 --> 00:48:42.115
잠깐만 제가 가지고 왔어요.

00:48:42.215 --> 00:48:45.540
 $y=\sqrt{x}$ 라는 것이
함수로써 인정을 받으려면

00:48:45.640 --> 00:48:48.175
 x 가 0보다 크거나
같아야 되거든요.

00:48:48.275 --> 00:48:52.130
이 함수는 정의역이
0보다 크거나 같아요.

00:48:52.230 --> 00:48:54.674

그래야지만 정의가 될 수 있어요.

00:48:54.774 --> 00:48:59.237

그다음에 치역은 y 가 0보다 크거나 같다고 나오게 됩니다.

00:48:59.337 --> 00:49:02.193

이게 정의역과 치역이 이렇다는 것은

00:49:02.293 --> 00:49:04.223

사실 굳이 얘기를 안 해줘도 되거든요.

00:49:04.323 --> 00:49:07.958

우리가 보통 함수가 정의된다고 할 때 이렇게 되어 있으면

00:49:08.058 --> 00:49:12.862

굳이 이거 안 써줘도 사람들이 이거 정의돼라고 알고 있어요.

00:49:12.962 --> 00:49:16.323

정의되려면 x 가 0보다 크거나 같아야 돼라고 알아요.

00:49:16.423 --> 00:49:20.880

왜냐하면 근호 속에 x 가 들어가 있으니까 근호 속에 x 가 들어간 게

00:49:20.980 --> 00:49:23.496

우리가 다루는 함수는 실수 세계에서만 다루니까,

00:49:23.596 --> 00:49:26.911

허수는 다루지 않으니까 0보다 크거나 같아야 돼라는 건

00:49:27.011 --> 00:49:29.051

알고 있어서 굳이 써주지 않아요, 사실.

00:49:29.151 --> 00:49:31.675

나중에 여러분 교과서 뒤에 무리함수 찾아 보시면

00:49:31.775 --> 00:49:34.276

굳이 x 가 0보다 크거나 같다 이런 거 안 써주거든요.

00:49:34.376 --> 00:49:37.992

그런데 이거의 역함수를 구하려고 한다면 애를 x 에 대해서 풀죠.

00:49:38.092 --> 00:49:41.534

그럼 x 에 대해서 푸는 과정에서 우리가 양변을 제곱을 해요.

00:49:41.634 --> 00:49:43.603

$x=y^2$ 과 같아요.

00:49:43.703 --> 00:49:47.274

그러면 x 랑 y 랑 자리 바꾸면
 $y=x^2$ 이 되거든요.

00:49:47.374 --> 00:49:49.132
이게 역함수의 식이에요.

00:49:49.232 --> 00:49:51.290
정말 역함수가 되는지
확인해 볼까요?

00:49:51.390 --> 00:49:53.399
여기다가 4 넣으면 2 나오죠.

00:49:53.499 --> 00:49:56.245
그러면 여기다가 2 넣었을
때 4가 나와야 되는데

00:49:56.345 --> 00:49:57.933
나오는 거 맞죠, 당연히?

00:49:58.033 --> 00:50:01.749
그렇게 해서 역함수가 됐는데
 $y=x^2$ 이라고만 써 놓으면

00:50:01.849 --> 00:50:05.134
우리가 일반적으로 x 가 0보다
크거나 같아야만 해라고

00:50:05.234 --> 00:50:07.082
알고 있지 않아요.

00:50:07.182 --> 00:50:09.787
그냥 모든 실수에 대해서
정의가 되어 있잖아요.

00:50:09.887 --> 00:50:12.425
그런데 이게 이거의 역함수였으니까.

00:50:12.525 --> 00:50:15.687
이거의 치역이 0보다
크거나 같았으니까

00:50:15.787 --> 00:50:20.607
이거의 정의역은 0보다 크거나
같아지는 것으로만 제한된다고

00:50:20.707 --> 00:50:21.509
써줘야 돼요.

00:50:21.609 --> 00:50:25.214
 $y=\sqrt{x}$ 의 역함수를 구한다고
할 때 범위가 이렇게 될까

00:50:25.314 --> 00:50:29.494
정의역이 심정적으로 봤을 때 여기
원래 $\sqrt{}$ 라는 모양이 있었으면

00:50:29.594 --> 00:50:32.456
굳이 안 써줘도 사실 상관은
없는데 이런 식으로 나왔다.

00:50:32.556 --> 00:50:34.084

그러면 써주는 것이 좋습니다.

00:50:34.184 --> 00:50:39.238

이것도 제가 아까 얘기했던 어떤 오류의 측면, 엄밀성의 측면에서

00:50:39.338 --> 00:50:41.540

제가 오늘 굉장히 엄밀하게 얘기를 하고 있는데요.

00:50:41.640 --> 00:50:43.341

그럴 때 써야 되는 것이고.

00:50:43.441 --> 00:50:45.835

그냥 일상적으로는 아, 그렇구나.

00:50:45.935 --> 00:50:48.553

이제 우리 이렇게까지는 문제가 나오지는 않긴 해서

00:50:48.653 --> 00:50:50.215

참고로 이제 알아두시면 되겠습니다.

00:50:50.315 --> 00:50:55.659

$y=2x+3$ 의 역함수 구하는 것은 실수에서 정의역, 공역이

00:50:55.759 --> 00:51:00.393

모두 다 실수여서 그냥 마음 편하게 그 관계식만 잘 구해주시면 돼요.

00:51:00.493 --> 00:51:02.594

그래프 한번 그려보면 이렇게 생겼죠.

00:51:02.694 --> 00:51:05.166

일대일대응이라는 것이 확연하게 보이고요.

00:51:05.266 --> 00:51:08.669

역함수를 구한다면 이제 관계가 어떻게 된다고요?

00:51:08.769 --> 00:51:13.022

x 가 y 로 어떻게 표현이 되는가라는 걸 구하고 싶은 거예요.

00:51:13.122 --> 00:51:18.573

$2x$ 가 $y-3$ 이니까 $x=2$ 분의 $1y-2$ 분의 3 으로 나오게 되고.

00:51:18.673 --> 00:51:20.952

여기에서 이제 x 랑 y 랑 자리를 바꿔서

00:51:21.052 --> 00:51:28.628

$y=2$ 분의 $1x-2$ 분의 3 이 되었다고 한다면 애의 역함수가 나오게 됩니다.

00:51:28.728 --> 00:51:30.835

이거 그래프 한번 볼게요.

00:51:30.935 --> 00:51:34.239

x절편이 -2분의 1이고,
y절편이 3이었어요.

00:51:34.339 --> 00:51:36.712

여기에서는 x절편이 뭐가 나오죠?

00:51:36.812 --> 00:51:41.829

x절편이 3이 나오고, y절편
-2분의 1이 나오네요.

00:51:41.929 --> 00:51:44.835

그러면서 그래프가 이렇게
그러지게 됩니다.

00:51:44.935 --> 00:51:46.942

둘의 그래프 관계가 어떤가요?

00:51:47.042 --> 00:51:51.768

여기에서 y랑 x를
바꾼다는 조작을 했어요.

00:51:51.868 --> 00:51:55.492

그래서 y는, 그러니까 결국
y랑 x랑 바뀌서 푼 거거든요.

00:51:55.592 --> 00:52:00.077

원래 식 결과적으로 봤을 때
y랑 x랑 바뀌서 풀었어요.

00:52:00.177 --> 00:52:04.877

그런데 우리 앞에서 배웠던 도형의
이동에서 y랑 x랑 자리 바꾸면

00:52:04.977 --> 00:52:06.981

무슨 일이 생겼어요?

00:52:07.081 --> 00:52:14.427

$y=x$ 에 대해서 대칭이
나오게 됩니다.

00:52:14.527 --> 00:52:18.023

원래 함수랑 역함수의 그래프의
그 관계를 살펴본다면

00:52:18.123 --> 00:52:20.968

반드시 $y=x$ 에 대해서
대칭이 돼요.

00:52:21.068 --> 00:52:26.134

그 그래프가 왜 항상 그렇게 나오는지
좀 엄밀하게 보도록 할게요.

00:52:26.234 --> 00:52:31.400

역함수가 존재하는 함수 $y=f(x)$
그래프 위에 임의의 점을

00:52:31.500 --> 00:52:33.246

(a, b) 라고 해봅시다.

00:52:33.346 --> 00:52:37.132
그러면 $b=f(a)$ 죠.

00:52:37.232 --> 00:52:41.045
임의의 점에 이렇게 존재하니까
여기 위에 존재한다는 것은

00:52:41.145 --> 00:52:43.449
이 관계식을 만족한다는
거잖아요, 이 점이.

00:52:43.549 --> 00:52:46.004
 a 를 대입했을 때 b 가 나오죠.

00:52:46.104 --> 00:52:49.562
그런데 이거는 역함수가
존재한다고 했어요.

00:52:49.662 --> 00:52:55.065
역함수에다 그러면 b 를 대입했을 때
 a 가 나온다는 말을 한 거랑 똑같죠.

00:52:55.165 --> 00:52:58.947
 f 에다 a 를 넣었을 때
 b 가 나왔다면

00:52:59.047 --> 00:53:01.529
역함수에 b 를 넣어서
 a 가 나오구요.

00:53:01.629 --> 00:53:05.586
이제 역함수에다 그러면 b 를
넣어서 a 가 나왔다는 것을 알면

00:53:05.686 --> 00:53:08.410
 f 에 a 를 넣었을 때
 b 가 나오게 된다는 거.

00:53:08.510 --> 00:53:11.074
아까 제가 별표도
쳤던 그 내용이에요.

00:53:11.174 --> 00:53:16.601
그러면 (a, b) 가 $y=f(x)$
위의 점이라고 한다면

00:53:16.701 --> 00:53:18.820
 f 의 역함수에는 뭐가 있느냐.

00:53:18.920 --> 00:53:24.802
 (b, a) 가 있는데 애네 둘의 관계는
서로 $y=x$ 에 대해서 대칭이라는 거예요.

00:53:24.902 --> 00:53:29.401
임의의 점에 대해서 모든 점이
 $y=x$ 에 대해서 대칭인 관계가

00:53:29.501 --> 00:53:32.477
있기 때문에 두 그래프 자체가
어디에 대해서 대칭?

00:53:32.577 --> 00:53:37.135

반드시 $y=x$ 에 대해서
대칭되는 관계를 갖게 됩니다.

00:53:37.235 --> 00:53:38.888

이런 상황이에요.

00:53:38.988 --> 00:53:41.683

$y=f(x)$ 에
(a, b)가 있었어요.

00:53:41.783 --> 00:53:45.532

그럼 반드시 (b, a)가
역함수 위에 있게 되는데,

00:53:45.632 --> 00:53:49.786

역함수 그래프 위에 있게 되는데 애네
관계는 $y=x$ 대칭이라는 거예요.

00:53:49.886 --> 00:53:53.286

모든 점에 대해서 이런
대칭 관계가 성립합니다.

00:53:53.386 --> 00:53:57.801

그러니까 그래프 자체가,
이 $y=f(x)$ 그래프 자체가

00:53:57.901 --> 00:54:00.961

$y=x$ 에 대해서 대칭으로
나오게 되는 거예요.

00:54:01.061 --> 00:54:02.672

논리적으로 문제 없죠?

00:54:02.772 --> 00:54:05.278

(a, b)가 여기 위의 점이에요.

00:54:05.378 --> 00:54:07.738

(b, a)가 여기 위의 점이에요.

00:54:07.838 --> 00:54:09.899

역함수의 정의 때문에 그래요.

00:54:09.999 --> 00:54:11.708

a 넣었을 때 b 나온다.

00:54:11.808 --> 00:54:16.299

역함수는 그러면 무엇을 넣어야
a가 나올까라는 것을 찾을 때

00:54:16.399 --> 00:54:21.072

b를 넣어야 a가 나온다고 역으로
추정을 한 관계였기 때문에

00:54:21.172 --> 00:54:25.062

a 넣었을 때 b가 나왔다면
b 넣었을 때 a가 나오고.

00:54:25.162 --> 00:54:29.396

둘의 관계는 $y=x$ 대칭이니까

모든 점에서 그렇다고 한다면

00:54:29.496 --> 00:54:34.260
반드시 그래프 자체가 $y=x$ 에 대해서
대칭이다라고 나오게 된 것입니다.

00:54:34.360 --> 00:54:37.287
그래서 이제 이런 그림을
보게 될 거예요.

00:54:37.387 --> 00:54:38.596
점입가경이죠.

00:54:38.696 --> 00:54:41.150
갈수록 뭔가 그림이 복잡해지죠.

00:54:41.250 --> 00:54:44.576
 $y=f(x)$ 랑 $y=x$ 를
같이 봤어요.

00:54:44.676 --> 00:54:48.488
이걸 보자마자 여러분이
해놓으시는 거 뭐가 있냐면

00:54:48.588 --> 00:54:49.991
 $y=x$ 잖아요.

00:54:50.091 --> 00:54:54.200
 $y=x$ 위에 어떤 점이 있다면
그 점의 x 좌표랑 y 좌표가

00:54:54.300 --> 00:54:55.907
똑같다는 걸 의미하죠.

00:54:56.007 --> 00:54:59.206
 a 를 대입했을 때 뭐가 나오나요?
 a 가 나오고요.

00:54:59.306 --> 00:55:00.611
 $y=x$ 에 대입했을 때.

00:55:00.711 --> 00:55:02.536
 b 를 대입했을 때 b 가 나오고요.

00:55:02.636 --> 00:55:06.470
 c 를 대입했을 때 c 가 나오고,
 d 를 대입했을 때 d 가 나와요.

00:55:06.570 --> 00:55:08.942
이거를 표시를 해놓고 같게요.

00:55:09.042 --> 00:55:11.026
보통 x 축에 값을 줘요.

00:55:11.126 --> 00:55:15.896
그러면 $y=x$ 를 이용해서 여기
 y 축에 해당하는 점의 좌표를

00:55:15.996 --> 00:55:17.834
결정을 해줄 수가 있습니다.

00:55:17.934 --> 00:55:22.038

$y=x$ 라는 거 자체가 그야말로
 x 랑 y 랑 같다는 것이니까

00:55:22.138 --> 00:55:26.703

이 a 에 대응하는 y 의
값이 a 일 수밖에 없고.

00:55:26.803 --> 00:55:31.614

b 에 대응하는 y 의 값이 b ,
 c 에 대응하는 y 의 값이 c ,

00:55:31.714 --> 00:55:35.244

d 에 대응하는 y 의 값은
 d 가 나올 수밖에 없어요.

00:55:35.344 --> 00:55:37.051

당연히 이렇게 나오게 되죠.

00:55:37.151 --> 00:55:43.769

그랬을 때 뭘 찾자고 했냐면 f 의
역함수에다 b 를 넣어 보재요, 먼저.

00:55:43.869 --> 00:55:47.593

합성을 해주는데 f 의
역함수에다 b 를 넣고

00:55:47.693 --> 00:55:50.084

그걸 다시 f 의 역함수에
넣자고 했거든요.

00:55:50.184 --> 00:55:52.460

이제 무엇을 찾아봐야 되죠?

00:55:52.560 --> 00:55:57.712

어떤 거를 여기 역함수에
대입해야 b 가 나올까라는 걸

00:55:57.812 --> 00:55:59.533

생각해보는 거예요.

00:55:59.633 --> 00:56:01.356

이걸 한번 k 라고 해볼까요?

00:56:01.456 --> 00:56:04.253

같은 말로 무슨 말을
할 수가 있어요?

00:56:04.353 --> 00:56:07.420

f 에다 k 를 넣었을 때
뭐가 나온다는 거죠?

00:56:07.520 --> 00:56:09.137

바로 b 가 나오는 거예요.

00:56:09.237 --> 00:56:14.854

그래서 y 축에서 이 b 라는 값을
갖도록 하는 $f(x)$ 의 x 값은

00:56:14.954 --> 00:56:17.591

무엇인가라는 걸 찾는 거예요.

00:56:17.691 --> 00:56:20.045

$f(x)$ 에 대응하는
값을 찾고 있죠?

00:56:20.145 --> 00:56:24.883

그러니까 이 y 값이 $f(x)$,
그래프 읽으실 수 있죠?

00:56:24.983 --> 00:56:26.558

그래프를 읽는 방법.

00:56:26.658 --> 00:56:32.517

y 값의 좌표가, y 좌표의
값이 b 일 때 해당하는

00:56:32.617 --> 00:56:36.766

이 그래프 위의 점에 해당하는
 x 좌표의 값이 무엇이나.

00:56:36.866 --> 00:56:42.084

c 라는 걸 통해서 바로 이 k 가
 c 가 된다는 걸 구할 수가 있어요.

00:56:42.184 --> 00:56:45.212

그러면 이제 또 뭘 하면 되죠?

00:56:45.312 --> 00:56:49.546

f 의 역함수에다 이제 c 를 넣은
것을 또 찾고자 하는 것인데.

00:56:49.646 --> 00:56:55.746

이걸 l 이라고 한다면 f 에다 무엇을
대입해야 c 가 나오겠느냐는 거잖아요.

00:56:55.846 --> 00:56:59.729

그러면 무엇을 대입해야 c 가
나오느냐라는 걸 찾는 것이니까

00:56:59.829 --> 00:57:03.958

바로 이 c 를 어떻게 무엇을
대입해야 될 것인가.

00:57:04.058 --> 00:57:07.451

또 $f(x)$ 에 대응하는 값을
찾아보니까 d 로 나오게 되죠.

00:57:07.551 --> 00:57:11.006

결과적으로 답은 여기까지
대입을 했을 때

00:57:11.106 --> 00:57:16.381

이게 l 이 d 로 나오게 되니까
이거의 값은 d 가 됩니다.

00:57:16.481 --> 00:57:18.898

그래서 d 로 대응되는 그런 것이다.

00:57:18.998 --> 00:57:21.829

만약 함수를 같이
그려 놓으려고 했다면

00:57:21.929 --> 00:57:25.216

여기에서 역함수를 그려
놓을 수 있었어요.

00:57:25.316 --> 00:57:28.579

역함수를 그릴 때 이렇게
 $y=x$ 에 대해서 대칭이 되도록

00:57:28.679 --> 00:57:29.961

그릴 수가 있어요.

00:57:30.061 --> 00:57:33.349

그러면 그거 b 를 넣었을 때
나오게 되는 값이 무엇이 되고,

00:57:33.449 --> 00:57:36.164

그걸 또 넣었을 때 나오는 값이
무엇이 되고라는 걸 찾는데

00:57:36.264 --> 00:57:39.051

이게 곡선이어서 모양을
정확하게 그리기가 어렵죠.

00:57:39.151 --> 00:57:43.850

그렇다면 이 관계식, 제가
정말 별표 쳤던 역함수 문제가

00:57:43.950 --> 00:57:49.984

사실 그래프 아니면 뭐 직접
함수식을 구하는 거 우리가 봤지만

00:57:50.084 --> 00:57:55.512

정말 직접 역함수의 식을 구하는 일은
10번 중에 1번 정도 일어납니다.

00:57:55.612 --> 00:57:57.445

그런 일은 정말 잘
일어나지 않아요.

00:57:57.545 --> 00:58:01.088

나중에도 이제 우리가
미분이라는 걸 배울 때

00:58:01.188 --> 00:58:03.018

역함수의 미분 이런
걸 배울 거예요.

00:58:03.118 --> 00:58:05.204

그때도 역함수의 식을
구해서 하는 것이 아니라

00:58:05.304 --> 00:58:09.821

원래 함수와 역함수 간의 어떤 기하적
관계를 이용해서 찾게 되거든요.

00:58:09.921 --> 00:58:12.882

그런 것처럼 애도 이제
이런 관계를 이용해서

00:58:12.982 --> 00:58:17.245

함숫값을 찾을 수 있지 역함수를
직접 구할 일은 거의 없어요.

00:58:17.345 --> 00:58:20.250
그래서 이 역함수의 정의인 거죠.

00:58:20.350 --> 00:58:24.154
원래 함수에 k 를 대입했을
때 b 가 나왔다면

00:58:24.254 --> 00:58:26.586
역함수에는 b 를 대입했을
때 k 가 나온다.

00:58:26.686 --> 00:58:29.160
거꾸로 가는 게 b 를
대입했을 때 k 가 나왔다면

00:58:29.260 --> 00:58:33.025
원래 함수에는 k 를 대입해야
 b 가 나온다는 이 관계로

00:58:33.125 --> 00:58:36.297
대부분의 문제가 풀리니까
이거를 잘 기억해 놓고

00:58:36.397 --> 00:58:39.216
사용을 해주시면 좋겠습니다.

00:58:39.316 --> 00:58:43.218
빠른 속도로 엄청난 양을 했어요.

00:58:43.318 --> 00:58:46.317
합성함수, 역함수.

00:58:46.417 --> 00:58:47.965
살짝 걱정이 되네요.

00:58:48.065 --> 00:58:49.074
너무 빠른 게 아닐까.

00:58:49.174 --> 00:58:51.405
혹시 모르는 거 있으시면
질문 게시판에 올리시고

00:58:51.505 --> 00:58:53.007
교과서 한번 써보세요.

00:58:53.107 --> 00:58:55.947
쓰면서 다시 한번, 아니면
우리 교재를 다시 한번 이렇게

00:58:56.047 --> 00:59:00.075
똑같이 쓰면서 보시고 제가
일부러 예를 많이 넣었어요.

00:59:00.175 --> 00:59:06.270
원제, 태환이, 친했던 선생님들 다
끌어와서 예를 많이 넣어놨으니까

00:59:06.370 --> 00:59:08.867

그 예를 통해서 합성함수가
뭐, 역함수가 뭐,

00:59:08.967 --> 00:59:11.333
이 정도만 이해를 해주셔도 좋고.

00:59:11.433 --> 00:59:14.017
아까 엄밀성이 요구되는
그런 부분들이 있었죠?

00:59:14.117 --> 00:59:17.138
딱 합성했는데 항등함수가
나오고 그런 것까지는 아직

00:59:17.238 --> 00:59:20.871
모른다고 치더라도 이제 합성함수가
뭔지, 역함수가 뭔지.

00:59:20.971 --> 00:59:24.907
특히 역함수에서 $f(a)$ 가 b 라고
하면 역함수에 b 를 넣은 게

00:59:25.007 --> 00:59:30.138
 a 가 나온다는 거 잘 기억을 해주시면
문제들은 잘 풀 수가 있을 거예요.

00:59:30.238 --> 00:59:33.856
그럼 복습해보시고 개념
확인 문제 미리 풀어보시고

00:59:33.956 --> 00:59:36.901
같이 한번 해보도록 할게요.

00:59:37.001 --> 00:59:40.382
 g 랑 f 를 합성한 거에 a 를
넣었더니 5가 나왔습니다.

00:59:40.482 --> 00:59:45.073
그러면 이거는 $f(g(a))$ 의
값이 5가 되었다는 뜻이죠.

00:59:45.173 --> 00:59:48.080
그런데 $g(a)$ 가 어떻게 되죠?

00:59:48.180 --> 00:59:53.411
 $g(x)$ 가 x^2-1 이었으니까
 $g(a)$ 는 a^2-1 이 돼요.

00:59:53.511 --> 00:59:58.534
그러면 f 에다 a^2-1 을 넣은
것이 5가 된다는 것인데.

00:59:58.634 --> 01:00:02.488
 f 는 들어간 것을 2배 해준
것에다 1을 빼는 거였어요.

01:00:02.588 --> 01:00:06.915
그렇기 때문에 a^2-1 에 2배를
해주고 -1을 한 것이

01:00:07.015 --> 01:00:09.386

5가 나온다고 식을
정리해줄 수가 있죠.

01:00:09.486 --> 01:00:13.189

그러면 a^2-1 의 값이
3으로 나오게 되네요.

01:00:13.289 --> 01:00:19.802

a^2 이 4가 되니까 a 는 ± 2 중에서
양수의 값을 찾으라고 했기 때문에

01:00:19.902 --> 01:00:21.705

2로 값을 찾을 수가 있죠.

01:00:21.805 --> 01:00:23.386

그래서 답 ②번으로 나오게 되고요.

01:00:23.486 --> 01:00:27.929

이번에는 모든 실수 x 에 대해서
 f 하고 g 를 합성했더니

01:00:28.029 --> 01:00:30.054

항등함수가 나왔어요.

01:00:30.154 --> 01:00:33.991

x 하고 x 하고 이렇게 그대로
나오게 되었습니다.

01:00:34.091 --> 01:00:37.360

애네 둘의 관계가 역함수겠구나라는
걸 알 수가 있고.

01:00:37.460 --> 01:00:40.572

그걸 모른다고 치더라도
그냥 나와 있는 그대로

01:00:40.672 --> 01:00:42.831

적용해서 한번 풀어보도록 할게요.

01:00:42.931 --> 01:00:46.123

$g(x)$, f 에다 넣었어요.

01:00:46.223 --> 01:00:48.082

x 가 나온다는 거예요.

01:00:48.182 --> 01:00:50.779

그러면 f 가 $ax-6$ 이죠.

01:00:50.879 --> 01:00:54.868

f 에다 $g(x)$ 를 넣게 되면,
단계별로 좀 가볼까요?

01:00:54.968 --> 01:00:59.675

$a \times g(x) - 6$ 이 나오게 될 거고,
이게 x 랑 같아진다는 건데.

01:00:59.775 --> 01:01:03.584

$g(x)$ 식이 2분의 $1x+b$ 예요.

01:01:03.684 --> 01:01:08.528

그러니까 이렇게 계산한 게 x 랑

항상 같아지게 된다는 것입니다.

01:01:08.628 --> 01:01:14.124
2분의 $1ax+ab-6$ 이
 x 랑 같아요.

01:01:14.224 --> 01:01:19.530
그러면 양변을 비교해서
똑같아야 하니까 2분의 $1a$ 랑

01:01:19.630 --> 01:01:23.408
 x 의 계수인 1 이
서로 똑같아야겠죠.

01:01:23.508 --> 01:01:27.115
그다음에 $ab-6$ 이랑
뭐랑 같으면 되나요?

01:01:27.215 --> 01:01:29.722
여기 상수항은 값이 0 이네요.

01:01:29.822 --> 01:01:31.122
 0 과 같으면 됩니다.

01:01:31.222 --> 01:01:33.135
 $ab-6$ 이 0 이 돼요.

01:01:33.235 --> 01:01:36.912
 a 는 2 로 나오게 되죠,
 b 는 3 이 됩니다.

01:01:37.012 --> 01:01:41.670
그래서 $2+3$ 해주면 5 가 되니까
둘을 더한 다음에 100 을 곱하면

01:01:41.770 --> 01:01:43.091
 500 이 나오게 되겠네요.

01:01:43.191 --> 01:01:44.723
 a 가 2 라고 했거든요.

01:01:44.823 --> 01:01:45.990
 $2x-6$ 이 고요.

01:01:46.090 --> 01:01:49.933
그다음에 b 가 2분의 $1x+b$ 의
값은 3 이 나왔어요.

01:01:50.033 --> 01:01:51.887
애는 역함수 관계 맞나요?

01:01:51.987 --> 01:01:57.032
우리 $f(x)$, $y=2x-6$ 에서
역함수 구하는 과정을 생각해 보면

01:01:57.132 --> 01:01:59.078
애를 x 에 대해서 풀죠.

01:01:59.178 --> 01:02:02.444
그다음에 양변을 2분의
 1 로 나눠주죠.

01:02:02.544 --> 01:02:06.925

이렇게 된 상황에서 y 랑 x 랑
서로 자리 바꾼 거 해보면

01:02:07.025 --> 01:02:08.685

이거 나오는 거 맞죠?

01:02:08.785 --> 01:02:11.330

합성해서 이렇게 항등함수가 되었다.

01:02:11.430 --> 01:02:13.548

서로 간의 관계가
역함수라는 것입니다.

01:02:13.648 --> 01:02:15.871

이번에는 막 난리가 났어요.

01:02:15.971 --> 01:02:18.321

a 를 대입해서 3이
나오도록 한다고 했는데

01:02:18.421 --> 01:02:20.524

이거 세 번 다 계산하실 건가요?

01:02:20.624 --> 01:02:21.947

이거 뭐예요?

01:02:22.047 --> 01:02:23.506

그냥 항등함수라고요.

01:02:23.606 --> 01:02:25.392

역함수에다 뭔가를 넣었어요.

01:02:25.492 --> 01:02:26.769

다시 원래 함수를 넣어요.

01:02:26.869 --> 01:02:28.261

그러면 넣은 거 그대로
나오게 되죠.

01:02:28.361 --> 01:02:32.730

그래서 이거는 역함수에다 a 를
넣은 것이 3이 된다고 하는

01:02:32.830 --> 01:02:35.486

a 값을 찾는 건데 역함수
구하실 건가요?

01:02:35.586 --> 01:02:37.050

절대 그렇지 않습니다.

01:02:37.150 --> 01:02:42.489

너무너무 중요한 거, 이거 성립할
때 바로 뭐 성립한다고 했죠?

01:02:42.589 --> 01:02:45.564

f 에다 3을 넣었을
때 a 가 나옵니다.

01:02:45.664 --> 01:02:47.540

그냥 $f(3)$ 을 구하라는 거예요.

01:02:47.640 --> 01:02:48.903

너무 쉬운 문제예요.

01:02:49.003 --> 01:02:51.615

역함수의 정의를 알고
있다고 한다면.

01:02:51.715 --> 01:02:54.542

다시, 역함수를 구하는
일은 거의 없다고 했어요.

01:02:54.642 --> 01:02:57.760

우리 심지어 2번 문제도
원래 함수랑 역함수가 같다는

01:02:57.860 --> 01:03:00.803

성질을 사용할 수도 있지만
그거 모르더라도 이렇게 풀어서

01:03:00.903 --> 01:03:02.207

할 수가 있었잖아요.

01:03:02.307 --> 01:03:05.468

역함수를 직접 구하기보다는 이
성질을 사용하는 거예요.

01:03:05.568 --> 01:03:07.847

역함수에 a 를 넣어서 3이 나왔다.

01:03:07.947 --> 01:03:10.499

원래 함수에 3을 넣어서
 a 가 나온다는 뜻이다.

01:03:10.599 --> 01:03:12.613

그게 역함수의 정의니까.

01:03:12.713 --> 01:03:15.275

혜연이가 중국에 간다고 했다.

01:03:15.375 --> 01:03:19.683

중국에 간다고 한 사람은 누구냐,
혜연이다라고 하는 그 관계인 거죠.

01:03:19.783 --> 01:03:22.330

그럼 $f(3)$ 의 값은 얼마죠?
28이네요.

01:03:22.430 --> 01:03:24.455

그래서 a 는 그냥 28로
나오게 됩니다.

01:03:24.555 --> 01:03:27.285

여기다가 3 넣어보면 3^3+1 이죠.

01:03:27.385 --> 01:03:29.437

그래서 28이 돼요.

01:03:29.537 --> 01:03:35.842

이번에 X 가 1, 2, 3, 4에서 1, 2,

3, 4로 가는데 일대일대응이라고 했네요.

01:03:35.942 --> 01:03:37.546

역함수가 존재할 거고요.

01:03:37.646 --> 01:03:43.258

그다음에 X 의 모든 원소 a 에 대해서 $f(a)$ 는 a 가 아니라고 했어요.

01:03:43.358 --> 01:03:47.023

어떤 것도 자기 자신으로
가지 않는 그런 함수입니다.

01:03:47.123 --> 01:03:51.997

그런데 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3,
4 그러면 어떤 식으로 대응이 되고 있느냐.

01:03:52.097 --> 01:03:57.244

$f(1)$ 과 $f(4)$ 를 더한
것이 7이라고 나왔거든요.

01:03:57.344 --> 01:04:02.786

그러면 $f(1)$ 이 가질 수 있는 값은
1, 2, 3, 4 중 하나예요.

01:04:02.886 --> 01:04:07.026

$f(4)$ 가 가질 수 있는 값도 1, 2,
3, 4 중에서 하나씩을 갖습니다.

01:04:07.126 --> 01:04:10.763

일대일대응이기 때문에
서로 다른 곳으로 가요.

01:04:10.863 --> 01:04:13.108

그러면 애네가 선택할 수
있는 값은 무엇일까요?

01:04:13.208 --> 01:04:16.359

더해서 7 나오려면 뭐가
나올 수밖에 없어요?

01:04:16.459 --> 01:04:19.323

3이나 4가 나올 수밖에 없겠죠.

01:04:19.423 --> 01:04:22.437

여기까지 보고 알 수
있는 사실은 무엇이나.

01:04:22.537 --> 01:04:25.218

만약에 $f(1)$ 의 값이 3이었다.

01:04:25.318 --> 01:04:32.641

그러면 $f(4)$ 의 값이
4가 되는 거고요.

01:04:32.741 --> 01:04:40.242

$f(1)$ 이 4이면 $f(4)$ 의
값이 3이 됩니다.

01:04:40.342 --> 01:04:42.110

그래야지만 더해서 7이

나올 수 있는데.

01:04:42.210 --> 01:04:46.449

둘 중에 뭐가 가능할까요?

01:04:46.549 --> 01:04:49.156

이렇게 3, 4 서로

다른 길 적용시킨 것은

01:04:49.256 --> 01:04:51.589

일대일대응이라고 했기

때문에 그런 건데.

01:04:51.689 --> 01:04:53.854

문제의 조건 중에 이게 있었어요.

01:04:53.954 --> 01:04:57.278

모든 원소에 대해서 $f(a)$ 가

a 이면 안 되거든요.

01:04:57.378 --> 01:04:59.329

그런데 이거 어떨죠?

01:04:59.429 --> 01:05:00.892

4가 4로 대응이 됐어요.

01:05:00.992 --> 01:05:03.839

불가능합니다, 그래서

이게 되어야 돼요.

01:05:03.939 --> 01:05:08.024

$f(1)$ 이 4로 갔고요,

$f(4)$ 는 3으로 와요.

01:05:08.124 --> 01:05:14.416

그런데 문제에서는 $f(1)$ 과

f 의 역함수에 1을 대입한 것을

01:05:14.516 --> 01:05:16.366

찾아주자고 했어요.

01:05:16.466 --> 01:05:18.562

그러면 $f(1)$ 의 값은 뭐가 되죠?

01:05:18.662 --> 01:05:20.393

바로 4가 되고요.

01:05:20.493 --> 01:05:25.155

1은 누구로부터 그러면 화살표를
받았을 것이냐라는 것을

01:05:25.255 --> 01:05:26.424

선택을 해야 돼요.

01:05:26.524 --> 01:05:28.171

나머지 애들 대응을 시켜 볼게요.

01:05:28.271 --> 01:05:31.225

2가 갈 수 있는 곳은

뭇밖에 없을까요?

01:05:31.325 --> 01:05:34.401

1과 2 남았는데 자기
자신으로 못 가죠.

01:05:34.501 --> 01:05:36.721

2가 1로 갔을 수밖에 없어요.

01:05:36.821 --> 01:05:38.597

남아 있는 3은 2로 갑니다.

01:05:38.697 --> 01:05:40.085

일대일대응의 매력이에요.

01:05:40.185 --> 01:05:43.193

하나씩 가는 거니까 조건 이렇게
몇 개 끼어 맞추다 보면

01:05:43.293 --> 01:05:46.080

대응이 이거밖에 안 되네라고
이렇게 구할 수가 있어요.

01:05:46.180 --> 01:05:50.560

2가 1 또는 2밖에 안 나왔는데
자기 자신으로 가면 안 된다는

01:05:50.660 --> 01:05:53.679

이 강력한 조건 때문에 2로
못 가고 1로 갔으니까

01:05:53.779 --> 01:05:58.082

나머지 하나 남아 있는 곳으로
가야지만 일대일대응이 되는 거죠.

01:05:58.182 --> 01:06:00.712

그럼 1은 누구로부터
화살표를 받았느냐.

01:06:00.812 --> 01:06:02.277

2로부터 받았습시다.

01:06:02.377 --> 01:06:06.204

그렇기 때문에 둘을 더한다면
값이 6으로 나오게 되죠.

01:06:06.304 --> 01:06:09.414

그래서 답은 3번이 된다고
찾을 수가 있습니다.

01:06:09.514 --> 01:06:10.638

너무 재미있죠.

01:06:10.738 --> 01:06:13.308

일대일대응과 이러한 함수의
성질들을 이용해서 풀 수 있는

01:06:13.408 --> 01:06:14.546

아주 좋은 문제였어요.

01:06:14.646 --> 01:06:15.985

고3에 나왔던 문제예요.

01:06:16.085 --> 01:06:21.274
3점짜리이기는 하지만 2017년 올해
7월에 고3 나형에 나왔던 문제입니다.

01:06:21.374 --> 01:06:25.884
이번에는 두 함수의 그래프와
 $y=x$ 를 같이 그려줬네요.

01:06:25.984 --> 01:06:29.235
난리가 났는데, 일단
뭐부터 표시하자 그랬죠?

01:06:29.335 --> 01:06:32.294
 x 축에 a, b, c, d ,
 e 라는 값이 나와 있어요.

01:06:32.394 --> 01:06:36.589
 y 축에는 값이 없지만, 이걸 보고 일단
표시를 해놓는 게 속 편할 거예요.

01:06:36.689 --> 01:06:39.572
누구에 의해서 결정을 해주면 되죠?

01:06:39.672 --> 01:06:44.966
 $y=x$ 위에 있다는 것은
 x 값이랑 y 값이 같다는 것이니까

01:06:45.066 --> 01:06:47.661
여기로 대응을 시켜서 이 값은 a .

01:06:47.761 --> 01:06:49.790
그런데 점선이 없으니까
안 쓰일 건가 봐요.

01:06:49.890 --> 01:06:51.521
점선이 있는 것만 표시해 볼까요?

01:06:51.621 --> 01:06:54.970
여기가 b 가 되고, 이게
 c 가 되고, 여기가 d ,

01:06:55.070 --> 01:06:59.602
그다음에 여기가 따라서 e 가 된다고
이렇게 표시를 해줄 수가 있겠네요.

01:06:59.702 --> 01:07:03.401
이제 $f(c)$ 를 한번 구해볼까요?

01:07:03.501 --> 01:07:05.699
 $f(c)$ 어떻게 구해요?

01:07:05.799 --> 01:07:11.091
 c 를 f 에 의해서 대응시켰을 때 이
함수가 $f(x)$ 라고 했거든요.

01:07:11.191 --> 01:07:12.588
어디로 가느냐.

01:07:12.688 --> 01:07:14.079
 b 나와요.

01:07:14.179 --> 01:07:16.450

그래프만 읽을 수 있으면
풀 수 있는 문제입니다.

01:07:16.550 --> 01:07:17.859

그래프가 무슨 뜻이죠?

01:07:17.959 --> 01:07:22.118

이 정의역의 원소를 대입했을 때

01:07:22.218 --> 01:07:26.252

y값 뭐 나오느냐라는 걸 알려주는 걸
그림으로 표현한 거라고 했잖아요.

01:07:26.352 --> 01:07:28.105

이게 b 가 나옵니다.

01:07:28.205 --> 01:07:32.231

그러면 g 의 역함수에다 b 를
넣은 것은 어떻게 될 것이냐.

01:07:32.331 --> 01:07:35.726

이거를 우리가 별이라고
한다면, k 라고 해볼까요?

01:07:35.826 --> 01:07:41.132

k 라고 한다면 g 에다 k 를 넣어서
 b 가 나오는 걸 찾자는 거죠.

01:07:41.232 --> 01:07:45.545

g 의 y 값이 b 가 되는
것을 찾으면 됩니다.

01:07:45.645 --> 01:07:51.024

그러면 g 의 y 값 b 가 되는 거
여기 이제 b 라는 값이 있는데

01:07:51.124 --> 01:07:53.395

이 y 값을 b 로 갖는 거.

01:07:53.495 --> 01:07:57.538

$g(x)$ 에다 값 대응시켜서
밑으로 내려와 보니까

01:07:57.638 --> 01:08:00.787

바로 a 가 b 로 대응이 됐었어요.

01:08:00.887 --> 01:08:07.011

$g(a)$ 가 b 가 되기 때문에 그 뜻은
 g 의 역함수에 b 를 넣었을 때는

01:08:07.111 --> 01:08:08.656

a 가 나온다는 뜻이죠.

01:08:08.756 --> 01:08:13.173

그래서 이렇게 a 가 된다는 걸
그래프 읽어서 찾을 수 있어요.

01:08:13.273 --> 01:08:18.130

복잡하게 생겼지만 그래프 분석하고
그냥 각각의 값 대응되는 것만

01:08:18.230 --> 01:08:21.198

꼼꼼하게 찾아주면 아주 쉽게
풀 수 있는 문제입니다.

01:08:21.298 --> 01:08:24.410

이렇게 우리가 합성함수와
역함수까지 봤고요.

01:08:24.510 --> 01:08:28.084

그러면 함수의 기본적인
어떤 엄밀한 정의,

01:08:28.184 --> 01:08:31.428

집합에서 정의가 되는 것, 앞으로
함수 무엇이나라고 했을 때

01:08:31.528 --> 01:08:34.030

대응관계 그냥 이렇게만
말하면 안 돼요.

01:08:34.130 --> 01:08:36.240

정의역과 공역이 있어야
된다고 했어요.

01:08:36.340 --> 01:08:39.719

정의역의 각 원소를 공역의 원소에
하나씩 대응시켜주는 거부터

01:08:39.819 --> 01:08:43.462

출발을 해서, 거기에서부터 출발을
해서 그래프의 엄밀한 정의를 봤고요.

01:08:43.562 --> 01:08:47.264

함수와 함수들의 관계를 볼 때
어떤 합성함수라는 새로운 연산.

01:08:47.364 --> 01:08:49.964

역함수라는 연산을 보았습니다.

01:08:50.064 --> 01:08:53.518

그럼 이제 우리가 여태까지
다루었던 함수들 생각해 보면

01:08:53.618 --> 01:08:55.529

일차함수, 이차함수
이런 게 있었는데.

01:08:55.629 --> 01:08:58.022

그 함수의 종류 좀 더
다양하게 다뤄보면 좋겠죠.

01:08:58.122 --> 01:09:00.857

다음 강에서는 유리함수,
그리고 그다음 강에서

01:09:00.957 --> 01:09:02.727

무리함수를 배우게 될 거예요.

01:09:02.827 --> 01:09:06.272

거기에서 또 함수에 대한 것 잘

보려고 한다면 복습 잘 하시고요.

01:09:06.372 --> 01:09:09.379
다음 강에서 만나도록 하겠습니다.