WEBVTT

00:00:10.754 --> 00:00:12.967
안녕하세요?
수포자를 위한 수학 기초특강.

00:00:13.134 --> 00:00:15.769
이번 강은 24강입니다.

00:00:15.869 --> 00:00:18.821
우리 지난 강에서 무엇을 봤었나요?

00:00:18.921 --> 00:00:21.640
같이 명제에 대해서 살펴보았습니다.

00:00:21.740 --> 00:00:24.745
수학 하 부분으로 오면서
우리가 집합을 통해

00:00:24.845 --> 00:00:26.747
수학적 대상을 명확하게 했고요.

00:00:26.847 --> 00:00:28.384
집합 간의 관계를 봤습니다.

00:00:28.484 --> 00:00:31.112
집합 간의 포함 관계를
사용을 한다면

00:00:31.212 --> 00:00:34.863
명제를 증명해줄 수가 있었어요.

00:00:34.963 --> 00:00:37.115
어떤 명제를 구성하는 방법,

00:00:37.215 --> 00:00:41.392
조건이 있을 때 조건과 조건을
if문으로 연결을 해서

00:00:41.492 --> 00:00:44.969
가정이면 결론이다, 라는
명제를 만들 수가 있었고요.

00:00:45.069 --> 00:00:48.877
그때 가정의 진리집합이 결론의
진리집합에 포함이 된다면

00:00:48.977 --> 00:00:52.835
그 명제가 참이라는 거를
보일 수가 있었죠.

00:00:52.935 --> 00:00:57.030
또는 모든 x에 대하여 어떤
조건이 성립한다는 것은

00:00:57.130 --> 00:01:01.995
진리집합이 전체집합과 같을 때
참이 된다는 거를 보일 수가 있었고요.

00:01:02.095 --> 00:01:07.851

어떤 x에 대해서 어떤 조건이
만족한다는 명제를 만들게 된다면

00:01:07.951 --> 00:01:11.506
진리집합이 공집합만 아니면 참이
된다고 이야기를 했습니다.

00:01:11.606 --> 00:01:14.482
그리고 각각이 거짓이
되는 예가 있었죠?

00:01:14.582 --> 00:01:17.664
그리고 그거를 통해서 명제를
구성을 해줄 수도 있었어요.

00:01:17.764 --> 00:01:20.524
이렇게 명제의 기본적인 구성방법과

00:01:20.624 --> 00:01:23.840
기본적으로 구성방법을 생각했을 때

00:01:23.940 --> 00:01:26.764
참, 거짓을 밝히는
방법을 보았는데.

00:01:26.864 --> 00:01:29.468
그러면 가만히 보니까 수학에서는

00:01:29.568 --> 00:01:33.417
참, 거짓임을 보일 수 있는
문장들이 굉장히 많아요.

00:01:33.517 --> 00:01:35.377
교과서 한번 펼쳐보세요.

00:01:35.477 --> 00:01:40.455
교과서를 펼쳤을 때 박스 안에 정리가
되어있는 문장들이 있습니다.

00:01:40.555 --> 00:01:44.327
그 대부분의 내용이 참, 거짓을
판단할 수 있는 내용이고

00:01:44.427 --> 00:01:48.938
참임을 밝혔기 때문에 박스 안에
들어와있는 것들이 있어요.

00:01:49.038 --> 00:01:51.433
그런 것들이 다 명제가 되고

00:01:51.533 --> 00:01:53.763
그러면 걔네들을 증명을 해줄 때

00:01:53.863 --> 00:01:56.657
모두 다 ~이면 ~이다,
라고 되어있는 것은

00:01:56.757 --> 00:01:59.615
다 진리집합 간의
포함 관계를 보고.

00:01:59.715 --> 00:02:02.095
모든 것에 대해서
성립한다고 할 때는

00:02:02.195 --> 00:02:05.154
다 진리집합, 거기에
들어가는 거를 다 구해서

00:02:05.254 --> 00:02:08.695
전체집합과 같은지를 살펴보고,
그렇게 보였나요?

00:02:08.795 --> 00:02:13.496
그러기에는 진리집합
자체가 무한집합이어서

00:02:13.596 --> 00:02:16.412
진리집합을 다 구하지 못하는 게
있을 수도 있습니다.

00:02:16.512 --> 00:02:19.591
그래서 좀 유한집합이고
눈에 확 드러나는

00:02:19.691 --> 00:02:22.584
그런 경우에는 진리집합
간의 관계로 보지만

00:02:22.684 --> 00:02:25.568
그렇지 않은 또 다양하게
생긴 명제 같은 경우에는

00:02:25.668 --> 00:02:29.372
어떻게 참임을 보일 수 있을
것인가라는 것을 살펴보는

00:02:29.472 --> 00:02:32.438
여러 가지 방법을
배우게 될 거예요.

00:02:32.538 --> 00:02:35.337
그래서 여러 가지 증명 방법입니다.

00:02:35.437 --> 00:02:37.065
수학의 핵심적인 내용이죠.

00:02:37.165 --> 00:02:40.499
수학에서 증명을 한다는 것,
그야말로 수학을 한다는 것은

00:02:40.599 --> 00:02:43.230
여러 가지 사실,
기본적인 재료를 가지고

00:02:43.330 --> 00:02:45.886
증명을 해낸다는 것을
의미하게 됩니다.

00:02:45.986 --> 00:02:50.225
그리고 모든 x에 대해서 성립한다는
명제가 있다고 했는데,

00:02:50.325 --> 00:02:53.375
그게 부등식의 맥락에서
많이 나오게 돼요.

00:02:53.475 --> 00:02:56.314
그래서 그런 부등식은 어떻게
증명할 수 있는지.

00:02:56.414 --> 00:02:58.358
모든 x라고 하면 모든 실수일 텐데

00:02:58.458 --> 00:03:00.330
진리집합을 다 구할 수는 없잖아요.

00:03:00.430 --> 00:03:03.806
그래서 그런 것들을 어떠한
방법으로 증명할 수 있는지를

00:03:03.906 --> 00:03:05.384
살펴보도록 하겠습니다.

00:03:05.484 --> 00:03:08.472
증명을 하기에 앞서서
우리가 무엇을 증명할지를

00:03:08.572 --> 00:03:10.116
명확하게 해야 되잖아요.

00:03:10.216 --> 00:03:12.268
우리가 친구들이랑 이야기를 하다보면

00:03:12.368 --> 00:03:16.700
서로 어떤 것에 대해서
정의하고 있는 방법이 달라서

00:03:16.800 --> 00:03:18.745
싸운 경험이 있을 거예요.

00:03:18.845 --> 00:03:20.648
저도 학교에서 일을 하다보면,

00:03:20.748 --> 00:03:23.863
이거에 대해서 어떻게
생각하는지 이야기를 해보자.

00:03:23.963 --> 00:03:27.925
너무 오해하면서 서로
언성도 높아지고

00:03:28.025 --> 00:03:31.443
그렇게 이야기가
잘 안 되는 경우가 많이 있어요.

00:03:31.543 --> 00:03:33.793
알고 보면 이런 오해가
왜 생겼을까?

00:03:33.893 --> 00:03:37.663
처음으로 가서 찾아보면
서로 어떤 것에 대해서

00:03:37.763 --> 00:03:40.238
생각하고 있었던 정의
자체가 달랐던 거예요.

00:03:40.338 --> 00:03:42.372
그러면 싸움이
생길 수밖에 없거든요.

00:03:42.472 --> 00:03:43.969
그런 오해를 잘 풀어야 합니다.

00:03:44.069 --> 00:03:47.552
그래서 우리가 수학에서도
무엇을 증명하고자 하는지

00:03:47.652 --> 00:03:51.560
어떤 대상을 증명하고자 하는지
확실하게 밝히기 위해서

00:03:51.660 --> 00:03:53.853
정의라는 거를 제대로
해주어야 돼요.

00:03:53.953 --> 00:03:57.136
정의라는 것이 용어의 뜻을
명확히 한 것입니다.

00:03:57.236 --> 00:03:59.975
교과서에서 보면 붉은
글씨, 색깔있는 글씨로

00:04:00.075 --> 00:04:01.752
표시되어있는 단어들이 있어요.

00:04:01.852 --> 00:04:05.716
그게 우리 교육과정 문서에서
학습요소라고 부르는 건데,

00:04:05.816 --> 00:04:09.260
제가 우리 교재에 제일
처음에 시작할 때

00:04:09.360 --> 00:04:11.041
학습목표를 적어드리잖아요?

00:04:11.141 --> 00:04:13.743
거기에 학습요소라는 것을
적어놓은 것이 있어요.

00:04:13.843 --> 00:04:17.820
그게 교육과정 문서 상에서 이 용어는
꼭 알고 넘어가야 된다는 것이고.

00:04:17.920 --> 00:04:22.030
교과서를 보면 그거에 대한 정의를
명확하게 해주고 있습니다.

00:04:22.130 --> 00:04:25.361
그런 정의는 명확하게 알고
넘어가야 하는 것이죠.

00:04:25.461 --> 00:04:27.055
그래서 용어의 뜻을 명확하게.

00:04:27.155 --> 00:04:31.140
이렇게 우리는 정의한다
땅땅땅, 정해준 것입니다.

00:04:31.240 --> 00:04:35.118
그러면 이렇게 명확하게
정의를 해놓는다면

00:04:35.218 --> 00:04:39.185
실험이나 경험을 따르지 않고
그냥 단순하게 경험을 통해서

00:04:39.285 --> 00:04:41.304
내가 이거를 봤더니 늘 이렇던대?

00:04:41.404 --> 00:04:43.774
그러니까 이거는 이거야,
라고 말을 하는 것이 아니라

00:04:43.874 --> 00:04:48.541
정의를 통해서, 또는 이미
널리 알려져있는 정리.

00:04:48.641 --> 00:04:52.396
또 하나의 성질을 통해서
밝혀진 성질들을 이용해서

00:04:52.496 --> 00:04:55.511
명제의 가정으로부터, 가정을 주죠.

00:04:55.611 --> 00:04:58.098
이런 이런 이런 것이
만족될 때 이것이다.

00:04:58.198 --> 00:05:00.286
p이면 q이다, 이런 형태에서

00:05:00.386 --> 00:05:04.133
이런 p라는 것까지 만족이 될 때
결론을 체계적으로 이끌어내요.

00:05:04.233 --> 00:05:07.530
그러면 이 체계적으로
이끌어낸다고 할 때는

00:05:07.630 --> 00:05:09.309
어떤 방법을 쓸 수 있을 것이냐?

00:05:09.409 --> 00:05:12.155
이미 갖고 있는 것들에 대한
제일 많이 사용하는 것이

00:05:12.255 --> 00:05:14.753
삼단논법을 적용해주는 거예요.

00:05:14.853 --> 00:05:20.043
그런데 삼단논법을 직접적으로

적용하기가 어려운 경우에

00:05:20.143 --> 00:05:23.369
사용할 수 있는 것이
대우를 이용한다든지

00:05:23.469 --> 00:05:27.559
아니면 귀류법을
사용한다든지 그런 것들.

00:05:27.659 --> 00:05:31.748
뒤에서 우리가 삼단논법이 뭔지,
대우가 뭔지, 귀류법이 뭔지

00:05:31.848 --> 00:05:33.350
살펴보게 될 거예요.

00:05:33.450 --> 00:05:37.198
이런 것을 통해서 명제가
참임을 설명해주는 것이

00:05:37.298 --> 00:05:39.927
증명 과정이라고 부르는 것입니다.

00:05:40.027 --> 00:05:44.226
그래서 이렇게 증명을 통해서
참임이 증명된 명제 중에

00:05:44.326 --> 00:05:46.458
기본이 되는 것, 많이 쓰는 것.

00:05:46.558 --> 00:05:49.875
우리가 많이 써서 좀
부르기 쉽게 해주는 것.

00:05:49.975 --> 00:05:52.216
그런 것을 정리라고 해요.

00:05:52.316 --> 00:05:56.617
예를 들어서 여러분이 정말 유명하게
알고 있는 정리가 뭐가 있느냐.

00:05:56.717 --> 00:06:04.090
피타고라스 정리, 이거 있죠?

00:06:04.190 --> 00:06:08.232
삼각형에서 $a^2+b^2=c^2$과
같으면 직각삼각형이 된다.

00:06:08.332 --> 00:06:13.956
직각삼각형이면
$a^2+b^2=c^2$가 된다.

00:06:14.056 --> 00:06:16.326
이런 피타고라스의 정리가 있고요.

00:06:16.426 --> 00:06:19.895
그다음에 중점연결정리라는
것도 있었어요.

00:06:19.995 --> 00:06:24.134

중학교 도형 복습할 때
같이 살펴봤었던 거죠.

00:06:24.234 --> 00:06:27.209
삼각형에서 두 변의
중점과 중점을 연결하고

00:06:27.309 --> 00:06:32.140
그러면 밑의 변과 평행이 되면서
길이가 2분의 1이 된다.

00:06:32.240 --> 00:06:34.870
아니면 다른 버전으로
어떤 한 변의 중점에

00:06:34.970 --> 00:06:39.467
밑변을 평행하게 긋게 되면 나머지
변의 중점을 지나가게 된다.

00:06:39.567 --> 00:06:46.607
이렇게 많이 쓰는 것은 특별히 정리라는
이름을 붙여서 불러주게 됩니다.

00:06:46.707 --> 00:06:48.913
이거 피타고라스 정리에 의해서

00:06:49.013 --> 00:06:51.702
이거 중점연결정리에 의해서
이렇게 되는 거잖아.

00:06:51.802 --> 00:06:54.892
이렇게 그때그때 불러서
쓰기가 쉬운 거죠.

00:06:54.992 --> 00:06:57.876
이거 성립한다는 거
그 정리의 이름으로 있었어.

00:06:57.976 --> 00:07:00.727
이런 목적 때문에 이런
정리, 이런 정리.

00:07:00.827 --> 00:07:02.100
정의는 아니에요.

00:07:02.200 --> 00:07:04.697
어떤 성질을 성립하는 거고
증명 가능한 것이니까.

00:07:04.797 --> 00:07:07.841
그런데 뭔가 기본이 돼서
자주 소환해야 되는 것.

00:07:07.941 --> 00:07:11.305
그것을 정리라는 이름을
붙여서 사용해주게 됩니다.

00:07:11.405 --> 00:07:15.500
그러면 예를 들어 중학교 교과서에서
있는 내용을 가지고 온 건데요.

00:07:15.600 --> 00:07:19.184
직사각형이라는 것이 어떻게
정의가 되어있냐면

00:07:19.284 --> 00:07:21.734
네 각의 크기가 모두 같은 사각형.

00:07:21.834 --> 00:07:25.404
네 각이 모두 직각인 사각형이
바로 직사각형의 정의이고

00:07:25.504 --> 00:07:27.199
우리가 사용을 하는 것입니다.

00:07:27.299 --> 00:07:31.279
그럴 때 정리, 이거는 사실
이름이 있는 정리는 아니고.

00:07:31.379 --> 00:07:35.341
엄밀하게 봤을 때 정리라기보다는
성질이라고 볼 수 있는데,

00:07:35.441 --> 00:07:38.245
예를 들어 이런 거의
이름을 정리라고 해놓자.

00:07:38.345 --> 00:07:41.676
직사각형의 정리야, 라고
붙일 수도 있다는 거죠.

00:07:41.776 --> 00:07:43.564
교실에서 그렇게 약속을
하면 되는 거고

00:07:43.664 --> 00:07:45.456
수학책에서 약속을
하면 되는 거고요.

00:07:45.556 --> 00:07:46.865
그래서 일종의 그 성질.

00:07:46.965 --> 00:07:50.563
예를 들어 두 대각선의 길이가
같고 서로를 이등분하는 사각형

00:07:50.663 --> 00:07:53.255
ABCD는 직사각형이 된다.

00:07:53.355 --> 00:07:56.463
무슨 뜻이냐면 어디까지가
가정일까요?

00:07:56.563 --> 00:08:00.677
두 대각선의 길이가 같고 서로를
이등분하는 사각형 ABCD가,

00:08:00.777 --> 00:08:02.851
여기까지가 가정이 되겠죠?

00:08:02.951 --> 00:08:07.998
그러면 직사각형이라는 거를

보여주려면 뭐를 보이라는 걸까요?

00:08:08.098 --> 00:08:11.061
정의가 네 각의 크기가
모두 같은 사각형이니까

00:08:11.161 --> 00:08:13.692
네 각의 크기가 모두 같다,

00:08:13.792 --> 00:08:18.222
이게 성립한다는 것을 보이게 된다면

00:08:18.322 --> 00:08:21.017
이제 직사각형이라는 거를 보일
수가 있게 되는 거예요.

00:08:21.117 --> 00:08:22.442
그래서 이런 명제를 봤을 때

00:08:22.542 --> 00:08:26.099
어디까지가 가정이고 무엇이
결론인지를 파악하는 거죠.

00:08:26.199 --> 00:08:30.025
그러면 p이면 q이다, 라는
형태로 이루어진 명제인데

00:08:30.125 --> 00:08:32.616
여기서 p의 진리집합을
구하려고 보니까

00:08:32.716 --> 00:08:35.935
두 대각선의 길이가 같고
서로를 이등분하는 사각형의

00:08:36.035 --> 00:08:37.818
전체집합을 구해야 돼요.

00:08:37.918 --> 00:08:39.848
불가능합니다, 무한집합이거든요.

00:08:39.948 --> 00:08:41.834
우리 이런 p이면 q이다,

00:08:41.934 --> 00:08:44.233
여기서 진리집합을
구하기에 딱 좋았던 것이

00:08:44.333 --> 00:08:49.057
무한집합이어도 부등식 같이
x의 범위로 나오는 것들은

00:08:49.157 --> 00:08:51.339
포함 관계를 분명히
볼 수가 있었어요.

00:08:51.439 --> 00:08:53.282
아니면 방정식의 해 같은 거.

00:08:53.382 --> 00:08:55.102
포함 관계를 분명히

볼 수가 있지만,

00:08:55.202 --> 00:08:57.176
이런 거, 약간 추상적이죠.

00:08:57.276 --> 00:09:00.600
그렇기 때문에 딱 눈에 보이게
집합을 표시할 수가 없는 경우에는

00:09:00.700 --> 00:09:03.383
진리집합을 통해서 보이기보다는

00:09:03.483 --> 00:09:07.533
일종의 가정문에서도부터
결론으로 이끌어내줄 수 있는

00:09:07.633 --> 00:09:10.077
삼단논법을 사용해보자는 거예요.

00:09:10.177 --> 00:09:14.557
그러면 얘네들을 어떻게 요리해서,
그야말로 요리하는 거거든요.

00:09:14.657 --> 00:09:18.508
적절히 배열을 해서 여기로
갈 수 있는지를 살펴보겠습니다.

00:09:18.608 --> 00:09:24.218
ABCD는 두 대각선이 서로
이등분하기 때문에 평행사변형이다.

00:09:24.318 --> 00:09:26.626
이 문장은 어디에서 나왔을까요?

00:09:26.726 --> 00:09:29.189
이미 알고 있는 사실이에요.

00:09:29.289 --> 00:09:34.914
뭔가 우리가 교과서에서
앞의 부분을 찾아본다면

00:09:35.014 --> 00:09:37.011
이런 거를 밝히는
부분이 있을 거예요.

00:09:37.111 --> 00:09:38.782
지금 이게 교과서의 몇 페이지,

00:09:38.882 --> 00:09:41.136
한 103페이지에서
가지고 왔다고 한다면

00:09:41.236 --> 00:09:42.916
이거를 이미 101페이지 쯤에서

00:09:43.016 --> 00:09:46.276
평행사변형의 정의에 의해서
밝힌 바가 있을 거예요.

00:09:46.376 --> 00:09:51.717
그래서 ABCD의 두 대각선이 서로

이등분한다는 가정이 있기 때문에

00:09:51.817 --> 00:09:55.129
평행사변형이라는 것까지는
보일 수가 있어요.

00:09:55.229 --> 00:09:59.843
그러면 평행사변형 중에 이렇게
생긴 거였다고 해볼까요?

00:09:59.943 --> 00:10:03.133
그리고 우리 사각형 쓸 때
이렇게 순환하면서 써주죠?

00:10:03.233 --> 00:10:05.887
A, B, C, D
이렇게 되어있다면

00:10:05.987 --> 00:10:10.087
평행사변형이니까
AB하고 그거의 대변,

00:10:10.187 --> 00:10:13.327
마주보고 있는 변의 길이는
서로 같다는 것이

00:10:13.427 --> 00:10:15.166
평행사변형의 정의였어요.

00:10:15.266 --> 00:10:21.251
그래서 AB하고 CD하고 같다는
것을 보여줄 수 있는 거죠.

00:10:21.351 --> 00:10:27.266
그런데 ABCD의 두 대각선의 길이가
같다는 것까지 나와있었거든요.

00:10:27.366 --> 00:10:30.135
그렇다면 누구랑 누구랑 같은 거죠?

00:10:30.235 --> 00:10:34.244
AC하고 BD하고 서로
같다고 해줄 수가 있죠?

00:10:34.344 --> 00:10:38.386
그러면 이제 삼각형 2개가
눈에 확 들어오는 거예요.

00:10:38.486 --> 00:10:44.987
그래서 삼각형을 뜯어서 올 때
ABCD라는 이 삼각형과

00:10:45.087 --> 00:10:48.689
그다음에 DCB라는
삼각형을 가지고 오죠.

00:10:48.789 --> 00:10:51.571
이렇게 생긴 두 삼각형에 대해서

00:10:51.671 --> 00:10:55.632
얘네들을 어떻게 요리할 수

있는지를 살펴보는 것입니다.

00:10:55.732 --> 00:11:00.564
그래서 DCB와 ABC.

00:11:00.664 --> 00:11:03.341
뭔가 의도를 갖고
이 순서대로 부르는 거겠죠?

00:11:03.441 --> 00:11:08.795
지금 보면 AC하고 그다음에
BD하고는 같다는 것이

00:11:08.895 --> 00:11:11.290
두 대각선의 길이가 같다는,

00:11:11.390 --> 00:11:14.482
우리 문제의 가정에서 나온 거예요.

00:11:14.582 --> 00:11:18.615
두 대각선의 길이가 같고,
여기서부터 끄집어낼 수가 있고.

00:11:18.715 --> 00:11:21.862
그다음에 누구를 공통으로
가지고 있어요?

00:11:21.962 --> 00:11:27.360
지금 보면 BC하고 BC하고는
딱 공통으로 똑같은 변이에요.

00:11:27.460 --> 00:11:31.676
그렇기 때문에 BC라는 변은
공통으로 가지고 있고요.

00:11:31.776 --> 00:11:36.099
그런데 AB하고 CD하고 같다는
것을 위에서 밝혀놨어요.

00:11:36.199 --> 00:11:39.255
이거하고 이거하고 같다고 했습니다.

00:11:39.355 --> 00:11:43.762
그렇게 된다면 이 삼각형은 서로
합동이라고 할 수가 있겠죠.

00:11:43.862 --> 00:11:47.725
변들끼리 서로 다 같아요,
세 변이 같아요.

00:11:47.825 --> 00:11:50.613
이런 거를 우리가
SSS합동이라고 했습니다.

00:11:50.713 --> 00:11:55.512
얘네가 합동이라면 대응하는
각끼리 크기가 같은 거예요.

00:11:55.612 --> 00:11:59.406
그래서 B하고 C하고
각의 크기가 똑같아진다고

00:11:59.506 --> 00:12:01.215
이야기를 해줄 수가 있는 거죠.

00:12:01.315 --> 00:12:04.118
그런데 ABCD는
평행사변형이었으니까

00:12:04.218 --> 00:12:07.560
평행사변형에서 이렇게
각의 크기가 같다면

00:12:07.660 --> 00:12:12.551
평행사변형은 마주보는 각들의
크기가 서로 같아지게 되거든요.

00:12:12.651 --> 00:12:15.761
그래서 B랑 D랑도
같고 A랑 C랑도 같고

00:12:15.861 --> 00:12:19.674
그게 성립하게 되기 때문에
ABCD 모두 다 90도가 되고

00:12:19.774 --> 00:12:22.823
이게 바로 직사각형의 정의인 거죠.

00:12:22.923 --> 00:12:27.163
그래서 ABCD는 직사각형이라는
거를 보여줄 수 있는 거예요.

00:12:27.263 --> 00:12:28.242
어떤가요?

00:12:28.342 --> 00:12:30.736
논리적으로 이거이면
이거고, 이거이면 이거고.

00:12:30.836 --> 00:12:33.911
그러니까 p이면 q이다,
라는 거를 보여주려고 하는데

00:12:34.011 --> 00:12:37.110
이 p에서 출발하면
q로 바로 가기 전에

00:12:37.210 --> 00:12:40.477
r이 성립하고 r이면 s고
s이면 뭐가 되고

00:12:40.577 --> 00:12:43.739
이렇게 쭉쭉 가다 보니까 q까지
도달할 수가 있는 거죠.

00:12:43.839 --> 00:12:47.381
삼단논법에서 썼던 그
사실들을 쭉 연결해서 붙여서

00:12:47.481 --> 00:12:49.448
결론까지 도달할 수가 있고.

00:12:49.548 --> 00:12:52.182
이거를 하는 과정에서
이미 알고 있는 사실,

00:12:52.282 --> 00:12:56.113
직사각형의 정의, 이런 것들을
적절히 요리하면 되는 거예요.

00:12:56.213 --> 00:12:57.650
이런 게 증명이었어요.

00:12:57.750 --> 00:13:00.686
내가 밝히고자 하는 것이
무엇일까, 라는 거를 살펴보고.

00:13:00.786 --> 00:13:02.631
갖고 있는 것이 무엇인가.

00:13:02.731 --> 00:13:06.462
중간에 연결할 수 있는 것이
무엇인가를 밝혀주는 것입니다.

00:13:06.562 --> 00:13:09.552
한 번에 가는 게 어렵다면
끝에서부터 가도 돼요.

00:13:09.652 --> 00:13:12.985
내가 직사각형을 보이려면
네 각이 같다는 거를 보이면 돼.

00:13:13.085 --> 00:13:15.030
이 네 각의 크기가
같다는 거를 보이려면

00:13:15.130 --> 00:13:18.378
이 삼각형에서 서로 이 각이
같다는 거를 보여주면 되겠지?

00:13:18.478 --> 00:13:21.113
그러려면 합동인 거를
보여줘야 되는데,

00:13:21.213 --> 00:13:23.520
갖고 있는 것으로부터
합동으로 가는 것을

00:13:23.620 --> 00:13:25.118
어떻게 연결지을 수 있을까?

00:13:25.218 --> 00:13:28.925
이런 고민을 하다보면 증명이
그렇게 어렵지만은 않습니다.

00:13:29.025 --> 00:13:31.849
그러면 여러 가지 증명 방법 중에서

00:13:31.949 --> 00:13:34.839
지금 방금 봤던 게
바로 삼단논법이에요.

00:13:34.939 --> 00:13:38.363

삼단논법, 아주 대표적인
예로 어떤 것이 있나요?

00:13:38.463 --> 00:13:40.490
소크라테스는 사람이다.

00:13:40.590 --> 00:13:44.410
사람은 죽는다, 그래서
소크라테스는 죽는다.

00:13:44.510 --> 00:13:47.182
중학교 교과서에, 요즘도
나오는지는 모르겠는데

00:13:47.282 --> 00:13:50.122
저 때는 국어 교과서에
이런 것이 나와있었는데요.

00:13:50.222 --> 00:13:52.568
많이 들어봤을 거예요.
이게 뭐죠?

00:13:52.668 --> 00:13:59.067
어떻게 연결이 된 거냐면
소크라테스는 사람이고

00:13:59.167 --> 00:14:04.443
사람은 죽기 때문에
소크라테스는 죽는다.

00:14:04.543 --> 00:14:07.419
이런 식으로 연결이 된다는 것이죠.

00:14:07.519 --> 00:14:10.514
그래서 p이면 q이고 q가 r이면

00:14:10.614 --> 00:14:16.500
이거를 연결지었을 때 p이면 r이라는
것을 보여줄 수 있는 거고요.

00:14:16.600 --> 00:14:20.014
우리 진리집합으로 본다면
p가 q에 포함이 되고

00:14:20.114 --> 00:14:22.179
q가 r에 포함이 되기 때문에

00:14:22.279 --> 00:14:25.121
p가 r에 포함이 된다고
할 수 있습니다.

00:14:25.221 --> 00:14:28.981
지금 그냥 관계를 보기 위해서
삼단논법이라고 본 것이지

00:14:29.081 --> 00:14:31.137
사실 n단논법이에요.

00:14:31.237 --> 00:14:33.322
n개까지 쭉 연결이
될 수가 있어요.

00:14:33.422 --> 00:14:36.572
p이면 뭐가 성립하고, 뭐가
성립하고, 뭐가 성립하고

00:14:36.672 --> 00:14:38.410
그래서 r이 성립한다면

00:14:38.510 --> 00:14:42.623
결과적으로 p이면 r이다,
라는 것이 나오게 된 거죠.

00:14:42.723 --> 00:14:44.205
우리 방금 봤던 게 그거죠.

00:14:44.305 --> 00:14:50.823
대각선의 길이가 서로 같고
서로를 이등분한다고 했을 때

00:14:50.923 --> 00:14:53.980
여기서 뭐의 변의 길이가 같고

00:14:54.080 --> 00:14:55.847
그래서 삼각형이 합동이 되고

00:14:55.947 --> 00:14:57.354
그래서 각의 크기가 같고

00:14:57.454 --> 00:14:59.752
그러면 네 각의 크기가
같아져서 직사각형이 된다.

00:14:59.852 --> 00:15:02.458
이런 식으로 쭉 연결이
된다는 거예요.

00:15:02.558 --> 00:15:07.405
그런데 이렇게 삼단논법으로 모든
증명이 깔끔하게 되면 좋을 텐데,

00:15:07.505 --> 00:15:10.737
그렇지 않고 약간 애매한
경우도 있습니다.

00:15:10.837 --> 00:15:12.812
제가 조금 이따가
예를 보여드릴게요.

00:15:12.912 --> 00:15:17.821
뭔가 끌어내고 싶은데 처음에 식을
설정하기가 약간 애매한 거예요.

00:15:17.921 --> 00:15:21.361
그랬을 때는 삼단논법을
직접 적용하는 것이 아니라

00:15:21.461 --> 00:15:24.675
대우를 이용해서 증명할
수도 있어요.

00:15:24.775 --> 00:15:25.787

왜 그렇죠?

00:15:25.887 --> 00:15:28.351
우리가 어떤 명제가
참이라고 했을 때

00:15:28.451 --> 00:15:31.093
그 대우도 참이 된다고 했습니다.

00:15:31.193 --> 00:15:33.375
그래서 p이면 q이다,
라는 것이 참이면

00:15:33.475 --> 00:15:35.757
~p이면 ~q라는 것도 참이잖아요.

00:15:35.857 --> 00:15:39.947
P가 Q에 포함이 되면
Q의 여집합이 p의 여집합에

00:15:40.047 --> 00:15:41.807
포함이 된다고 볼 수가 있으니까.

00:15:41.907 --> 00:15:44.350
그래서 오히려 결론을 부정한 것을

00:15:44.450 --> 00:15:48.696
가정을 부정한 것을 증명을
해준다는 것이 깔끔하게 될 때

00:15:48.796 --> 00:15:52.395
대우를 이용해서 증명을 더 잘해줄
수 있는 경우가 있고요.

00:15:52.495 --> 00:15:55.526
그다음에 귀류법이라는
것도 있습니다.

00:15:55.626 --> 00:16:00.107
이거는 명제 또는 명제의 결론을
부정을 해버리는 거예요.

00:16:00.207 --> 00:16:02.420
아니야 이렇지 않아, 라고 하니까

00:16:02.520 --> 00:16:05.791
다른 것에서는 다 문제가 없는데
뭔가 모순이 생긴 거죠.

00:16:05.891 --> 00:16:09.360
그러면 왜 이런 모순이
생겼을까, 라는 것을 살펴보면

00:16:09.460 --> 00:16:11.749
결론을 부정하면 안 됐었구나.

00:16:11.849 --> 00:16:14.766
이거 부정하지 않고 이게
꼭 참이어야겠구나.

00:16:14.866 --> 00:16:16.251

이렇게 나오게 되는 것.

00:16:16.351 --> 00:16:18.681
그것이 귀류법이라고
할 수가 있어요.

00:16:18.781 --> 00:16:21.345
그래서 예를 들어서 볼게요.

00:16:21.445 --> 00:16:25.718
n^2이 짝수이면 n도 짝수이다,
이렇게 나왔습니다.

00:16:25.818 --> 00:16:29.317
그러면 n^2이 짝수라는
것을 써본다면

00:16:29.417 --> 00:16:32.302
짝수의 정의는 2의 배수예요.

00:16:32.402 --> 00:16:34.793
2 곱하기 정수의 형태로
나타내줄 수 있는 수.

00:16:34.893 --> 00:16:36.982
2 곱하기 자연수,
보통 그렇게 가죠.

00:16:37.082 --> 00:16:42.436
그러면 k가 자연수일 때
n^2을 2k라고 썼어요.

00:16:42.536 --> 00:16:45.105
그러면 n도 짝수이다, 라는
거를 보여주기 위해서는

00:16:45.205 --> 00:16:50.463
n도 2 곱하기 자연수의 형태로
나타내진다는 결론으로

00:16:50.563 --> 00:16:52.171
도달을 해야 되거든요.

00:16:52.271 --> 00:16:55.092
여기서 시작해서 결론이
여기로 가는 삼단논법,

00:16:55.192 --> 00:16:56.787
연결이 되어있어야 돼요.

00:16:56.887 --> 00:16:59.142
그런데 n^2이 2k라고 하면

00:16:59.242 --> 00:17:02.235
n은 일단 쓸 수 있는
게 $\sqrt{2k}$거든요.

00:17:02.335 --> 00:17:05.354
너무 곤란해요, √가
나와버리는 순간

00:17:05.454 --> 00:17:08.237
2 곱하기 뭐가 된다고
보여주는 것이 어려운 거예요.

00:17:08.337 --> 00:17:11.088
직접적으로 여기로
가는 것이 어려우니까

00:17:11.188 --> 00:17:14.009
그러면 이렇게 직접 증명하지 말고

00:17:14.109 --> 00:17:16.487
대우명제를 적어보자는 거죠.

00:17:16.587 --> 00:17:19.359
이거의 대우명제는 어떻게 되나요?

00:17:19.459 --> 00:17:25.303
n이 짝수가 아니면,
결론을 제가 부정했죠?

00:17:25.403 --> 00:17:29.372
그랬더니 n^2이 가정이
부정이 되어서

00:17:29.472 --> 00:17:32.374
짝수가 아니다, 라는
것으로 오게 됩니다.

00:17:32.474 --> 00:17:35.653
그런데 n이 짝수가 아니라는 것은

00:17:35.753 --> 00:17:37.970
n이 어떤 수가 된다는 거죠?

00:17:38.070 --> 00:17:41.902
자연수에서 짝수가
아니면 홀수입니다.

00:17:42.002 --> 00:17:46.022
그래서 n이 홀수이면
n^2이 홀수이다.

00:17:46.122 --> 00:17:49.916
이런 것을 보여주는
것과 마찬가지가 돼요.

00:17:50.016 --> 00:17:53.558
그러면 이것을 증명해보도록 할게요.

00:17:53.658 --> 00:17:56.994
n이 홀수라는 것은
짝수가 아닌 것이고

00:17:57.094 --> 00:17:59.840
2로 나누었을 때
나머지가 생긴다는 거죠.

00:17:59.940 --> 00:18:03.324
2로 나누었을 때 나머지로 가능한
것은 0 또는 1이에요.

00:18:03.424 --> 00:18:04.980
짝수가 아니죠.

00:18:05.080 --> 00:18:07.919
짝수일 때는 나머지가 0이었으니까

00:18:08.019 --> 00:18:10.357
홀수일 때는 나머지가
1로 나오게 됩니다.

00:18:10.457 --> 00:18:15.553
n이 홀수이기 때문에 n을
2k+1이라고 할 수가 있어요.

00:18:15.653 --> 00:18:22.053
이때 모든 홀수를 구해주려면
k=0, 1, 2, 3

00:18:22.153 --> 00:18:25.417
이런 식으로 가는 0 이상의
정수가 되면 되겠죠.

00:18:25.517 --> 00:18:29.820
그러면 이때 n^2이
홀수라는 거를 보여주려면

00:18:29.920 --> 00:18:32.888
n^2이 결론으로 나오게 되는 것이

00:18:32.988 --> 00:18:40.660
2 곱하기 0 이상의 정수에
+1을 해준 형태가 되는지를

00:18:40.760 --> 00:18:45.527
살펴 본다면 n^2이 홀수라는
거를 보여줄 수가 있거든요.

00:18:45.627 --> 00:18:49.267
그러면 n에서 n^2으로
가는 거는 쉬워요.

00:18:49.367 --> 00:18:52.235
어떻게 하면 되죠? 그냥
제곱을 해주면 되죠.

00:18:52.335 --> 00:18:54.238
양변을 제곱해보는 거죠.

00:18:54.338 --> 00:18:57.193
$n^2=(2k+1)^2$입니다.

00:18:57.293 --> 00:19:02.623
그러면 이거를 풀어서 적으면
$4k^2+4k+1$이잖아요.

00:19:02.723 --> 00:19:12.330
그러면 이거는
$2(2k^2+2k)+1$이 된다.

00:19:12.430 --> 00:19:14.758

이렇게 써줄 수가 있네요.

00:19:14.858 --> 00:19:20.344
그래서 $n^2=2(2k^2+2k)+1$로
형태가 나오게 되었고

00:19:20.444 --> 00:19:24.060
k가 0 이상의 정수였기 때문에

00:19:24.160 --> 00:19:27.897
이것도 0 이상인 정수로
나오게 되겠죠.

00:19:27.997 --> 00:19:30.184
이런 식으로 정리가 되었습니다.

00:19:30.284 --> 00:19:33.012
그러면 우리가 n은 2 곱하기,

00:19:33.112 --> 00:19:36.289
어떤 0 이상의 정수 +
1 형태가 되었기 때문에

00:19:36.389 --> 00:19:40.755
n^2이 홀수가 된다는 결론을
끌어낼 수가 있는 거예요.

00:19:40.855 --> 00:19:43.008
n이 홀수이면 n^2이 홀수이다.

00:19:43.108 --> 00:19:45.956
이게 참이 되었으니까
또다시 이거의 대우명제인

00:19:46.056 --> 00:19:49.827
n^2이 짝수이면 n도 짝수이다, 라는
것도 보일 수가 있게 된 거죠.

00:19:49.927 --> 00:19:52.338
직접 보이려고 했더니 애매하다면

00:19:52.438 --> 00:19:55.841
이렇게 대우명제를 사용해줄
수가 있다는 거고요.

00:19:55.941 --> 00:19:59.432
$\sqrt{2}$가 무리수임을
증명해보도록 할게요.

00:20:03.736 --> 00:20:06.373
$\sqrt{2}$가 무리수이다.

00:20:06.473 --> 00:20:09.835
무리수임을 보이기 위해서는
어떤 거를 보여주면 되나요?

00:20:09.935 --> 00:20:12.882
무리수라는 것은
유리수가 아닌 수예요.

00:20:12.982 --> 00:20:14.574

그러면 유리수는 뭐죠?

00:20:14.674 --> 00:20:17.890
유리수의 정의는 정수분의 정수.

00:20:17.990 --> 00:20:20.325
분모에 들어가는 정수는
0이 아니고요.

00:20:20.425 --> 00:20:23.816
그렇게 정수분의 정수로
나타내줄 수 있는 수였어요.

00:20:23.916 --> 00:20:26.748
그런데 그게 아니라는
거를 보이려고 하니까

00:20:26.848 --> 00:20:29.977
이것도 뭔가 식을 딱
설정하기가 너무 어려워요.

00:20:30.077 --> 00:20:33.582
가정은 어떤 수가
√2이다, 이겁니다.

00:20:33.682 --> 00:20:35.462
그리고 결론이 무리수다, 이거예요.

00:20:35.562 --> 00:20:36.853
어렵죠?

00:20:36.953 --> 00:20:40.193
그렇기 때문에 이때 한번
귀류법을 사용해볼게요.

00:20:40.293 --> 00:20:43.621
귀류법이라고 뭐라고 했냐면,

00:20:43.721 --> 00:20:51.049
√2가 무리수가 아니라면,
이렇게 가는 거예요.

00:20:51.149 --> 00:20:55.570
√2가 무리수가 아니라면
√2는 무슨 수가 되죠?

00:20:55.670 --> 00:21:01.209
제곱했을 때 2가 되는 수니까
양수이니까 일단 실수예요.

00:21:01.309 --> 00:21:04.726
그러면 실수에서는 무리수가
아니면 어떤 수가 되죠?

00:21:04.826 --> 00:21:07.914
유리수이다, 이렇게
이야기를 해줄 수 있어요.

00:21:08.014 --> 00:21:10.838
그러면 √2가 유리수라고 한다면

00:21:10.938 --> 00:21:14.560
따라서 √2를 어떻게
표현해줄 수 있냐면

00:21:14.660 --> 00:21:17.641
p분의 q 형태로
나타내줄 수 있습니다.

00:21:17.741 --> 00:21:20.620
이때 p는 0이면 안 되고요.

00:21:20.720 --> 00:21:22.522
p, q는 정수예요.

00:21:22.622 --> 00:21:27.490
그런데 정수로 표현할 수 있는
방법이 굉장히 많잖아요.

00:21:27.590 --> 00:21:31.527
이 정수분의 정수로 표현할 수
있는 방법이 굉장히 많은데,

00:21:31.627 --> 00:21:34.280
2분의 1 같은 경우에
2분의 1이기도 하지만

00:21:34.380 --> 00:21:37.955
4분의 2이기도 하고
-4분의 -2이기도 하고.

00:21:38.055 --> 00:21:41.019
이런 식으로 굉장히 많은
표현방법이 가능하죠.

00:21:41.119 --> 00:21:44.827
그렇기 때문에 p, q를
어떻게 써줄 거냐면

00:21:44.927 --> 00:21:47.712
서로소인 자연수로 보겠습니다.

00:21:47.812 --> 00:21:51.437
일단 √2가 양수라는
것은 명백하니까

00:21:51.537 --> 00:21:53.343
자연수를 사용해줄 수가 있고.

00:21:53.443 --> 00:21:58.566
서로소인 거를 사용해준다면
명백하게 딱 하나의 방법으로만

00:21:58.666 --> 00:22:00.527
유일하게 표현해줄 수가 있죠.

00:22:00.627 --> 00:22:04.408
쉽게 이야기해서 기약분수의 형태로
정리를 하겠다는 거예요.

00:22:04.508 --> 00:22:07.294
그러면 이거로 나타낼 수 있다.

00:22:07.394 --> 00:22:13.403
따라서 유리수니까 $\sqrt{2}$를 이런
식으로 나타낼 수 있게 돼요.

00:22:13.503 --> 00:22:19.678
그러면 양변에 p를 곱했을 때
$\sqrt{2}p=q$로 나오게 되고요.

00:22:19.778 --> 00:22:23.727
$2p^2=q^2$으로 이렇게
표현이 되거든요.

00:22:23.827 --> 00:22:28.248
그러면 이거를 봤을 때
q^2은 어떤 수가 되냐면

00:22:28.348 --> 00:22:32.286
2의 배수입니다.
왜 그렇죠?

00:22:32.386 --> 00:22:36.835
2 곱하기 어떤 자연수를 한
것이 q^2이 되었어요.

00:22:36.935 --> 00:22:40.079
그러면 q^2은 2의 배수가
될 수밖에 없고.

00:22:40.179 --> 00:22:44.892
그렇다면 q를 제곱했을 때
2의 배수라고 한다면

00:22:44.992 --> 00:22:48.368
q가 2의 배수였어야겠죠,
2가 소수예요.

00:22:48.468 --> 00:22:51.576
그렇기 때문에 제곱해서
2의 배수라는 게 나오려면

00:22:51.676 --> 00:22:54.366
q 자체가 2의 배수가
되어야 되거든요.

00:22:54.466 --> 00:22:58.176
그러면 q를 우리가 2k로
표현이 가능해요.

00:22:58.276 --> 00:23:02.462
k가 자연수라고 했을 때 2k,
이런 식으로 쓸 수가 있고요.

00:23:02.562 --> 00:23:09.636
그것을 다시 아까 우리가 얻었던

00:23:09.736 --> 00:23:14.311
$2p^2=q^2$에 대입을
한번 해보도록 할게요.

00:23:14.411 --> 00:23:20.098

여기에 대입해준다면
$2p^2$이 q^2이니까

00:23:20.198 --> 00:23:23.612
$(2k)^2$이라고 써줄 수가 있고.

00:23:23.712 --> 00:23:26.612
그러면 $2p^2=4k^2$이라고
나오게 되죠?

00:23:26.712 --> 00:23:30.767
그러면 $p^2=2k^2$으로 나옵니다.

00:23:30.867 --> 00:23:36.365
그러면 여기서 p^2이 2 곱하기
자연수의 제곱이 되었어요.

00:23:36.465 --> 00:23:40.053
그렇기 때문에 역시
p도 2의 배수이다.

00:23:40.153 --> 00:23:42.728
이런 결론을 끌어낼 수가 있어요.

00:23:42.828 --> 00:23:47.288
그러면 p도 2의 배수이고
q도 2의 배수이니까

00:23:47.388 --> 00:23:50.081
p, q가 서로소일 수가 있나요?

00:23:50.181 --> 00:23:53.380
따라서 p, q는
서로소가 아니다.

00:23:53.480 --> 00:23:56.522
그렇기 때문에 서로소라고
했던 것의

00:23:56.622 --> 00:24:01.471
그 가정에 모순이 되는
일이 생기는 거예요.

00:24:01.571 --> 00:24:06.359
분명히 유리수라면 서로소인
자연수로 나타낼 수 있어야 되는데

00:24:06.459 --> 00:24:11.054
어떻게 노력을 하더라도 이 서로소가
될 수 없는 상황이 돼버린다는 거죠.

00:24:11.154 --> 00:24:14.980
p도 2의 배수이고 q도 2의
배수가 되어버렸으니까요.

00:24:15.080 --> 00:24:17.368
그러면 왜 이런 모순이 생겼을까?

00:24:17.468 --> 00:24:20.082
여기가 잘못됐나요?
잘못되지 않았어요.

00:24:20.182 --> 00:24:23.855
$p^2=2k^2$이라고 한다면 p는
2의 배수일 수밖에 없어요.

00:24:23.955 --> 00:24:26.522
만약에 p가 홀수였어요,
제곱하면 홀수거든요.

00:24:26.622 --> 00:24:28.587
홀수를 제곱한 거는 홀수니까,

00:24:28.687 --> 00:24:30.717
짝수를 제곱해야지만 짝수가 되니까

00:24:30.817 --> 00:24:32.688
p가 2의 배수라고 할 수가 있고.

00:24:32.788 --> 00:24:33.863
여기가 잘못됐나요?

00:24:33.963 --> 00:24:35.340
여기 계산 틀린 거 없습니다.

00:24:35.440 --> 00:24:36.894
여기도 다 잘못된 거 없어요.

00:24:36.994 --> 00:24:38.421
그러면 뭐가 잘못됐느냐?

00:24:38.521 --> 00:24:41.040
무리수가 아니라고 가정을 해놓은
것이 잘못됐다는 거죠.

00:24:41.140 --> 00:24:45.125
이렇게 해서 무리수가 된다는
것을 증명해줄 수가 있습니다.

00:24:45.225 --> 00:24:48.178
이렇게 귀류법을 사용할 수
있는 게 또 있는데,

00:24:48.278 --> 00:24:51.505
제가 앞에서 할까 말까
고민을 했었던 것 중에서

00:24:51.605 --> 00:24:58.268
i는 0보다 작지도 않고
크기 비교가 불가능하다.

00:24:58.368 --> 00:25:08.159
그러니까 음수도 아니고 양수도
아니고 0도 아니다.

00:25:08.259 --> 00:25:10.138
일단 명백하게 0은 아니죠.

00:25:10.238 --> 00:25:15.163
복소수가 0이 되려고
한다면 0+0i의 형태만

00:25:15.263 --> 00:25:17.503
0이 되는 것인데 그
정의에 맞지 않으니까

00:25:17.603 --> 00:25:19.839
이게 아니라는 것은 명백하고요.

00:25:19.939 --> 00:25:22.117
사실 음수도 아니고 양수도
아니라는 거예요.

00:25:22.217 --> 00:25:24.418
이거는 어떻게 보여줄 수 있느냐?

00:25:24.518 --> 00:25:26.560
또 귀류법을 사용해줄 수가 있는데.

00:25:26.660 --> 00:25:30.895
그러면 i가 0보다 크다고 했을 때
무슨 일이 벌어지게 될 것이냐?

00:25:30.995 --> 00:25:32.423
이거를 생각해보는 거예요.

00:25:32.523 --> 00:25:35.176
그러면 양변에 i를 곱해보겠습니다.

00:25:35.276 --> 00:25:37.794
그러면 좌변은 -1이 되죠?

00:25:37.894 --> 00:25:39.552
우변은 0이에요.

00:25:39.652 --> 00:25:41.926
-1이 0보다 크다는
일이 생깁니다.

00:25:42.026 --> 00:25:43.537
이게 모순이 돼버리죠.

00:25:43.637 --> 00:25:45.382
-1은 0보다 작아야 돼요.

00:25:45.482 --> 00:25:48.361
우리가 이미 알고 있는 명백한
사실의 모순이 돼요.

00:25:48.461 --> 00:25:51.003
i가 0보다 작으면 어떻게 될까요?

00:25:51.103 --> 00:25:54.377
i랑 0이랑 이런 관계를
유지하고 있는데,

00:25:54.477 --> 00:25:56.768
여기에 양변에 i를 곱했습니다.

00:25:56.868 --> 00:26:03.063
그런데 이때 양변에 i를
곱할 때는 i가 0보다 작거든요.

00:26:03.163 --> 00:26:07.435
0보다 작은 거를 양변에 곱하게
되면 부등호의 방향이 어떻게 되죠?

00:26:07.535 --> 00:26:10.004
뒤집하게 됩니다,
반대로 바뀌게 되죠.

00:26:10.104 --> 00:26:12.547
우리가 알고 있는 부등식의
성질을 적용을 한다면.

00:26:12.647 --> 00:26:16.069
그러면 또 역시 -1이 0보다
크다는 일이 생겨요.

00:26:16.169 --> 00:26:17.314
모순이 돼요.

00:26:17.414 --> 00:26:20.711
0보다 커도 모순이고 0보다
작아도 모순이고 0은 아니에요.

00:26:20.811 --> 00:26:24.057
그렇기 때문에 뭔가 수직선에서
0의 왼쪽에 있는지

00:26:24.157 --> 00:26:27.103
0에 있는지 오른쪽에 있는지
밝힐 수가 없는 거죠.

00:26:27.203 --> 00:26:29.847
수직선상에 존재하지
않는 수인 거예요.

00:26:29.947 --> 00:26:32.777
그래서 i는 음수도 아니고
양수도 아니고 0도 아닌

00:26:32.877 --> 00:26:34.566
크기 비교를 할 수 없는 수입니다.

00:26:34.666 --> 00:26:37.897
그래서 우리가 허수는 대소비교를
하지 않는다고 했었던 거예요.

00:26:37.997 --> 00:26:41.110
이런 거, 좀 애매한 것을
귀류법으로 보일 수가 있고.

00:26:41.210 --> 00:26:43.188
이거 말고도 굉장히 많아요.

00:26:43.288 --> 00:26:47.751
우리 원이랑 접선이랑 만나게
될 때 수직이 된다는 것도.

00:26:47.851 --> 00:26:51.177
수직이 아니라고 한다면
모순되는 일이 생기게 되고요.

00:26:51.277 --> 00:26:53.049
그다음에 소수 있죠?

00:26:53.149 --> 00:26:59.388
3, 7 이런 식으로 가면서 약수가
1과 자기 자신뿐인 소수.

00:26:59.488 --> 00:27:05.296
그것도 무한히 많다는 것을 귀류법
같은 것으로 보여줄 수가 있습니다.

00:27:05.396 --> 00:27:09.413
그래서 직접 증명, 삼단논법이
가장 기본이고요.

00:27:09.513 --> 00:27:11.874
그게 어려운 상황에서
대우를 이용하거나

00:27:11.974 --> 00:27:14.653
귀류법을 이용할 수 있다는
거 알고 계시면 되겠고요.

00:27:14.753 --> 00:27:20.838
이번에는 명제 중에서 모든 x에
대해서 성립한다는 그 명제 있었죠?

00:27:20.938 --> 00:27:25.281
전체집합이 진리집합이 된다는 거를
보이기가 너무 어려운 경우.

00:27:25.381 --> 00:27:31.518
예를 들어서 절대 부등식 문제가
대표적인 명제에 속하게 됩니다.

00:27:31.618 --> 00:27:35.646
모든 실수 x에 대해서
무엇이 성립한다고 하는,

00:27:35.746 --> 00:27:37.686
그 대표적인 예의 명제예요.

00:27:37.786 --> 00:27:40.728
절대부등식이라는 것은 부등식의
문자에 대입할 수 있는

00:27:40.828 --> 00:27:44.845
모든 실수에 대하여 항상 성립하는
부등식을 의미해요.

00:27:44.945 --> 00:27:49.598
그러니까 우리 명제 구조
중에 모든 실수 x에 대해서

00:27:49.698 --> 00:27:52.067
p(x)가 성립한다고 했었던 것.

00:27:52.167 --> 00:27:56.429
진리집합이 전체집합일 때
참이 되었던 그 명제.

00:27:56.529 --> 00:27:59.230
얘를 어떻게 증명할 수 있을지.

00:27:59.330 --> 00:28:02.315
진짜 진리집합을 다 구할 수는
없잖아요, 모든 실수인데.

00:28:02.415 --> 00:28:05.204
그러면 이 절대부등식을 증명할 때는

00:28:05.304 --> 00:28:07.817
어떤 실수의 성질을
사용할 수 있느냐?

00:28:07.917 --> 00:28:11.173
여러분, 명백하게 다
알고 있는 사실이에요.

00:28:11.273 --> 00:28:12.240
한번 확인해볼게요.

00:28:12.340 --> 00:28:13.576
a가 b보다 커요.

00:28:13.676 --> 00:28:15.296
a-b가 0보다 크게 되죠.

00:28:15.396 --> 00:28:18.465
그러니까 어떤 게 이거보다
크다는 거를 보이고 싶을 때

00:28:18.565 --> 00:28:20.252
기본적으로 빼보면 돼요.

00:28:20.352 --> 00:28:24.698
그러면 뺐을 때 0보다 크다는
것을 어떻게 보일 것이냐?

00:28:24.798 --> 00:28:29.466
뺀 식이 어떤 것에 대한 완전제곱식이
되도록 정리를 해주면 됩니다.

00:28:29.566 --> 00:28:33.585
완전제곱식이 되도록 정리할
수 있는지를 살펴봐서

00:28:33.685 --> 00:28:37.253
이것이 0보다 크거나 같다는
사실을 사용해준다면

00:28:37.353 --> 00:28:39.164
만약 이게 크거나 같았으면

00:28:39.264 --> 00:28:42.051
a가 b보다 크거나 같다는
거를 보여줄 수 있는 거죠.

00:28:42.151 --> 00:28:44.790
그리고 a^2+b^2,

00:28:44.890 --> 00:28:48.951

완전제곱+완전제곱도 0보다
크거나 같도록 나오게 돼요.

00:28:49.051 --> 00:28:53.541
등호가 언제 성립하냐면 이거는
a=0일 때 성립하게 되죠.

00:28:53.641 --> 00:28:55.554
여기서 등호는 언제 성립하죠?

00:28:55.654 --> 00:29:00.149
실수를 제곱해서 더한 것이 0이
되려면 둘 다 0이어야 됐어요.

00:29:00.249 --> 00:29:01.841
이때 등호가 성립하게 되고요.

00:29:01.941 --> 00:29:03.333
이 이야기하고 있는 거죠?

00:29:03.433 --> 00:29:05.976
제곱해서 더한 것이 0이면
다 0이 되어야 된다.

00:29:06.076 --> 00:29:09.181
그리고 절댓값 a를 제곱한 것은

00:29:09.281 --> 00:29:14.491
절댓값을 없앨 수 있는 방법으로서
그냥 a^2과 같아지게 된다.

00:29:14.591 --> 00:29:17.131
우리 강의하면서 한 여덟
번쯤 본 것 같아요.

00:29:17.231 --> 00:29:21.963
그래서 저런 것들, 절댓값이 들어가있는
부등식 보이려고 할 때

00:29:22.063 --> 00:29:25.980
절댓값을 없애야 되는데
없앨 때 범위를 나누어서

00:29:26.080 --> 00:29:28.462
기호를 없애주는 방법도 있지만,

00:29:28.562 --> 00:29:31.548
양변을 제곱해서 깔끔하게
없애는 방법도 있고.

00:29:31.648 --> 00:29:33.137
그 제곱하게 되는 원리에,

00:29:33.237 --> 00:29:36.561
만약 둘 다 양수라고 했을
때 a가 b보다 크다면

00:29:36.661 --> 00:29:38.905
a^2이 b^2보다 커지죠.

00:29:39.005 --> 00:29:43.178

그래서 그냥 밝히는 게
어렵다면 제곱하고 빼서,

00:29:43.278 --> 00:29:47.753
a^2-b^2 이게 0보다 크다는
거를 보이는 거예요.

00:29:47.853 --> 00:29:51.469
이러면 이게 어떤 거에 또
완전제곱이 된다는 거를 보여주면

00:29:51.569 --> 00:29:53.364
얘를 쉽게 보여줄 수가 있겠죠.

00:29:53.464 --> 00:29:58.205
이런 방법으로 부등식을
증명하게 됩니다.

00:29:58.305 --> 00:30:00.151
여기서 조심해야 될 거.

00:30:00.251 --> 00:30:02.271
둘 다 0보다 클 때
성립하는 거예요.

00:30:02.371 --> 00:30:06.804
예를 들어서 3이 2보다 컸다
그러면 9가 4보다 크죠.

00:30:06.904 --> 00:30:10.068
그런데 -3는 -2보다 작아요.

00:30:10.168 --> 00:30:14.321
그런데 얘를 제곱한 것은 9가
4보다 크다는 것이 나오게 되고.

00:30:14.421 --> 00:30:17.491
-3은 역시 어느
한 쪽이 양수였다.

00:30:17.591 --> 00:30:20.691
2보다 작지만 9가 4보다
크게 나오게 되죠.

00:30:20.791 --> 00:30:23.732
이번에는 3이 -2보다는 크지만

00:30:23.832 --> 00:30:26.804
9가 4보다 또 크도록
이렇게 부등호의 방향이

00:30:26.904 --> 00:30:28.876
유지가 될 수도 있고
바뀔 수도 있고 그래요.

00:30:28.976 --> 00:30:32.323
그래서 안전하게 사용하려면
둘 다 양수인 경우에

00:30:32.423 --> 00:30:35.146
이렇게 제곱하는 것은 사용하기로

우리가 약속을 합니다.

00:30:35.246 --> 00:30:38.466
그래서 예를 들어서 이런
거를 보자는 거예요.

00:30:38.566 --> 00:30:43.445
a, b가 실수일 때 이 부등식이
항상 성립한다는 거를 보이고 싶어요.

00:30:43.545 --> 00:30:46.110
0보다 크거나 같다는
거를 보이고 싶을 때는

00:30:46.210 --> 00:30:48.153
어떤 방법을 주로
사용하면 좋다고요?

00:30:48.253 --> 00:30:53.407
이거를 완전제곱의 형태로 바꿀 수
있는지를 생각해보는 거예요.

00:30:53.507 --> 00:30:58.223
이미 이차식이니까 완전제곱식으로
바꾸기에 전혀 무리가 없어보이죠.

00:30:58.323 --> 00:31:05.259
얘는 $a^2-2*a*b/2$라고
할 수가 있고요.

00:31:05.359 --> 00:31:07.791
그러면 +2분의 b를 제곱한 거.

00:31:07.891 --> 00:31:14.191
여기서 -가 여기에
걸린다고 생각해보면

00:31:14.291 --> 00:31:16.944
-2분의 b를 제곱했다고
봐도 되죠.

00:31:17.044 --> 00:31:21.431
그러면 여기까지 계산을
해준 것이 어떻게 되냐면

00:31:21.531 --> 00:31:25.198
$a^2-ab+b^2/4$이 되잖아요.

00:31:25.298 --> 00:31:28.309
그런데 원래 있었던
것은 b의 제곱이니까

00:31:28.409 --> 00:31:31.500
4분의 $3b^2$을 더 더해주어야겠죠.

00:31:31.600 --> 00:31:39.302
그러면 얘는
$(a-b/2)^2+3/4b^2$

00:31:39.402 --> 00:31:42.358
이거 2개를 더한 것과

같아지게 됩니다.

00:31:42.458 --> 00:31:45.967
그런데 이게 완전제곱이죠?
실수의 제곱이죠.

00:31:46.067 --> 00:31:48.675
이것도 실수의 제곱에 4분의
3을 곱한 것이죠.

00:31:48.775 --> 00:31:52.544
그렇기 때문에 0보다 크거나 같다는
것을 보여줄 수가 있고요.

00:31:52.644 --> 00:31:56.305
등호는 언제 성립하냐면 이거와
이게 둘 다 0일 때예요.

00:31:56.405 --> 00:31:58.203
그러면 b가 0이어야 되죠?

00:31:58.303 --> 00:32:02.230
b가 0일 때 이 식도 0이
되려면 a도 0이어야겠죠.

00:32:02.330 --> 00:32:06.115
등호는 a하고 b하고 모두 0일 때

00:32:06.215 --> 00:32:09.323
성립하게 된다는 것까지
알 수가 있습니다.

00:32:09.423 --> 00:32:12.767
부등식 증명할 때
조심해야 되는 점이

00:32:12.867 --> 00:32:17.148
이렇게 써놓고 계속 이거
붙여서 쓰는 학생들이

00:32:17.248 --> 00:32:19.680
서술형 채점하다보면 꼭 나와요.

00:32:19.780 --> 00:32:23.780
이 결론에서만 0보다 크거나 같다는
거를 쓸 수가 있는 거예요.

00:32:23.880 --> 00:32:25.956
일단 내가 식을 여기서
출발했잖아요.

00:32:26.056 --> 00:32:29.562
a^2-ab+b^2에서 출발했는데

00:32:29.662 --> 00:32:31.629
이것은 얘랑 같고

00:32:31.729 --> 00:32:33.523
이것이 이거랑 같고

00:32:33.623 --> 00:32:35.053

이거랑 같은데

00:32:35.153 --> 00:32:39.441
이제 이거는 실수의 제곱끼리 더해준
것이니까 0보다 크거나 같다.

00:32:39.541 --> 00:32:42.010
여기에서 0보다 크거나
같다는 것을 써줘야 돼요.

00:32:42.110 --> 00:32:45.636
그리고 등호 성립하는 경우도
예의상 밝혀주게 됩니다.

00:32:45.736 --> 00:32:49.046
보통 이거를 많이 밝히고
보이는 것이 좋아요.

00:32:49.146 --> 00:32:51.461
그래서 이런식으로 증명을
해줄 수가 있어요.

00:32:51.561 --> 00:32:53.482
생각보다 그렇게 어렵지 않죠.

00:32:53.582 --> 00:32:55.821
진리집합 모든 실수 되는
거 다 구할 필요없이

00:32:55.921 --> 00:32:59.727
이런 식으로 0보다 크거나
같다는 것을 보이려면

00:32:59.827 --> 00:33:04.359
어떤 것에 완전제곱이 된다는 것을 통해서
쉽게 보여줄 수 있다는 거예요.

00:33:04.459 --> 00:33:07.324
이번에는 이 부등식이 성립한다.

00:33:07.424 --> 00:33:09.845
예를 들어서 어떤 상황이냐면,

00:33:09.945 --> 00:33:17.808
|2+3|을 더한 거는 |2|+|3|보다
작거나 같은 거 맞죠?

00:33:17.908 --> 00:33:25.466
만약에 |2+(-3)|은
|2|+|-3|보다 작거나 같을 때

00:33:25.566 --> 00:33:28.782
이거는 1이고 이거는
5가 나오게 돼요.

00:33:28.882 --> 00:33:30.047
이쪽이 더 크죠?

00:33:30.147 --> 00:33:32.518
이거를 삼각부등식이라고 부릅니다.

00:33:32.618 --> 00:33:34.396
이 부등식의 이름이 있어요.

00:33:34.496 --> 00:33:38.461
굉장히 유명한 부등식이어서
삼각부등식이라고 불러주는데,

00:33:38.561 --> 00:33:41.256
얘를 어떻게 증명할 수
있을지 생각해볼게요.

00:33:41.356 --> 00:33:44.353
어떤 게 어떤 거보다
크다는 거를 보고싶어요.

00:33:44.453 --> 00:33:46.684
그러면 기본적으로
뭐를 할 수가 있죠?

00:33:46.784 --> 00:33:48.410
빼보면 되겠죠.

00:33:48.510 --> 00:33:54.182
그러면 뺄 때 lal+lbl에서
la+bl를 빼려고 하는데

00:33:54.282 --> 00:33:56.617
이것이 어떻게 되는지를
보여주면 되거든요.

00:33:56.717 --> 00:33:58.134
한숨이 나옵니다.

00:33:58.234 --> 00:34:02.799
이제 여기서 절댓값 기호를
없애려고 한다면

00:34:02.899 --> 00:34:04.721
범위를 4개로 나눠야 돼요.

00:34:04.821 --> 00:34:07.071
둘 다 0보다 클 때,
하나만 0보다 클 때,

00:34:07.171 --> 00:34:10.205
이런 식으로 4개로 나눠줘야 하니까

00:34:10.305 --> 00:34:12.865
이 절댓값이 좀 다루기가 어려운데.

00:34:12.965 --> 00:34:17.717
그런데 a+b, 절댓값이 있다면
이거는 0보다 크거나 같아요.

00:34:17.817 --> 00:34:24.133
그리고 lal+lbl 이것도
0보다 크거나 같아요.

00:34:24.233 --> 00:34:32.741
지금 이게 이거보다 크다는
거를 보여주려고 하는 거니까

00:34:32.841 --> 00:34:39.744
$(|a|+|b|)^2$에서
$(|a+b|)^2$

00:34:39.844 --> 00:34:48.574
이것이 0보다 크거나 같음을
보여도 된다고 써야 돼요.

00:34:48.674 --> 00:34:51.582
이것이다, 라고 쓰는 것이 아니라

00:34:51.682 --> 00:34:55.013
이것을 내가 보이겠다고 나의
의지를 밝히는 것이거든요.

00:34:55.113 --> 00:34:59.405
그래서 처음부터 이게 0보다 크거나
같다고 써놓는 것이 아니라

00:34:59.505 --> 00:35:02.645
내가 대신 이거를
보여줄 거야, 라고

00:35:02.745 --> 00:35:04.955
나의 계획을 밝힌 다음에,

00:35:05.055 --> 00:35:11.466
여기서 이거를 뺀 것을
계산을 해보는 거예요.

00:35:11.566 --> 00:35:15.690
실제로 이게 성립하는지 확인을
한번 해보는 것이죠.

00:35:15.790 --> 00:35:17.722
아직은 성립하는지 몰라요.

00:35:17.822 --> 00:35:21.669
성립한다고 밝힌 것이 아니라
이것임을 보일 것이다, 라는

00:35:21.769 --> 00:35:23.603
그 계획을 말을 한 거예요.

00:35:23.703 --> 00:35:27.097
그러면 여기 제곱에서
이거의 제곱을 뺀 것은

00:35:27.197 --> 00:35:30.013
여기 왼쪽 거 생각해볼게요.

00:35:30.113 --> 00:35:31.951
$|a|^2$ 나오죠.

00:35:32.051 --> 00:35:35.635
그다음에 +
$2|a||b|$이 있고요.

00:35:35.735 --> 00:35:40.330
$+|b|^2-|a+b|^2$입니다.

00:35:40.430 --> 00:35:44.133
그런데 절댓값은 제곱했을
때 절댓값이 없어진다는

00:35:44.233 --> 00:35:45.697
깔끔한 성질이 있었어요.

00:35:45.797 --> 00:35:47.336
a^2 나오게 되고

00:35:47.436 --> 00:35:50.705
이거는 2개 합쳐서 이렇게
절댓값 씌워도 되죠?

00:35:50.805 --> 00:35:53.247
그다음에 $+b^2$

00:35:53.347 --> 00:35:56.428
그다음에 - 얘는 절댓값을
제곱해준 거니까

00:35:56.528 --> 00:35:59.556
그냥 a+b의 제곱과
똑같아지게 되죠.

00:35:59.656 --> 00:36:06.955
그래서 여기에 이 부분이
$-a^2-2ab-b^2$이 되네요.

00:36:07.055 --> 00:36:09.425
그러면 이거랑 이거랑 없어지고

00:36:09.525 --> 00:36:11.068
얘랑 얘랑 없어지게 되면서

00:36:11.168 --> 00:36:14.709
2(labl-ab)가 나와요.

00:36:14.809 --> 00:36:16.071
그러면 어떤가요?

00:36:16.171 --> 00:36:19.571
labl하고 ab하고
누가 더 커요?

00:36:19.671 --> 00:36:21.638
당연히 이게 더 크거나 같습니다.

00:36:21.738 --> 00:36:23.908
이거는 항상 0보다
크거나 같은 거잖아요.

00:36:24.008 --> 00:36:28.001
ab가 0보다 크거나
같을 때는 ab이고.

00:36:28.101 --> 00:36:31.532
ab가 0보다 작을
때는 -ab가 되면서

00:36:31.632 --> 00:36:33.662
0보다 크게 나오는 애였어요.

00:36:33.762 --> 00:36:37.162
그렇기 때문에 ab보다 항상
크거나 같아지게 되겠죠.

00:36:37.262 --> 00:36:41.333
그래서 이제 이것은 0보다 크거나
같다고 할 수가 있고요.

00:36:41.433 --> 00:36:42.876
등호는 언제 성립하죠?

00:36:42.976 --> 00:36:45.087
이게 그냥 ab로 나오는 경우.

00:36:45.187 --> 00:36:48.470
즉 ab가 0보다 크거나 같을 때

00:36:48.570 --> 00:36:50.956
성립하게 된다는 것까지
알 수가 있어요.

00:36:51.056 --> 00:36:52.402
이런 식으로 보여주는 거예요.

00:36:52.502 --> 00:36:56.209
제곱해서 빼주는 방식으로 부등식을
증명해줄 수가 있습니다.

00:36:56.309 --> 00:37:00.143
모든 실수에 대해서 성립하는
그 부등식을 보여주는 방법.

00:37:00.243 --> 00:37:02.130
우리 사실 앞에서도 하나 했었어요.

00:37:02.230 --> 00:37:07.333
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$라고
나왔었던 거.

00:37:07.433 --> 00:37:11.493
그거 어떻게 구했었는지 생각나세요?

00:37:11.593 --> 00:37:13.929
앞에 2분의 1 곱하고
그다음에 2 곱하고 해서

00:37:14.029 --> 00:37:17.446
a-b의 제곱 b-c의
제곱 c-a의 제곱해서

00:37:17.546 --> 00:37:19.999
0보다 크거나 같다고
보인 적도 있었습니다.

00:37:20.099 --> 00:37:25.239
이제 정말 중요한 거, 모의고사에
제일 많이 나오는 것입니다.

00:37:25.339 --> 00:37:28.925
최댓값과 최솟값의 계산이
응용되는 절대부등식.

00:37:29.025 --> 00:37:31.158
이거 하려고 앞에 열심히 했어요.

00:37:31.258 --> 00:37:35.161
어떤 거냐면 a가 0보다
크고 b가 0보다 클 때

00:37:35.261 --> 00:37:38.101
조건을 잘 보면 모든
실수는 아니고요.

00:37:38.201 --> 00:37:39.815
둘 다 0보다 클 때예요.

00:37:39.915 --> 00:37:43.912
그때 a+b를 2로 나눈 것과

00:37:44.012 --> 00:37:46.177
a, b를 곱한 다음에 √ 씌운 것.

00:37:46.277 --> 00:37:49.650
대소 관계를 보면 항상 이쪽이
더 크거나 같다는 거예요.

00:37:49.750 --> 00:37:52.879
제가 제목을
산술기하평균으로 적어놨죠?

00:37:52.979 --> 00:37:57.789
이것을 a, b의
산술평균이라고 부르고요.

00:37:57.889 --> 00:38:00.878
단순하게 더해서 2로
나누었다고 해서

00:38:00.978 --> 00:38:04.385
이것을 기하평균이라고 부릅니다.

00:38:04.485 --> 00:38:05.943
그러니까 이런 거예요.

00:38:12.521 --> 00:38:17.921
내가 이번 중간고사 수학시험을
90점을 받았어,

00:38:18.021 --> 00:38:19.700
기말고사 100점을 받았어.

00:38:19.800 --> 00:38:22.582
그러면 평균은 95점이야.

00:38:22.682 --> 00:38:25.718
90+100 나누기 2해서
그렇게 구할 수 있는 것.

00:38:25.818 --> 00:38:27.800

아니면 이런 것도 가능하죠.

00:38:27.900 --> 00:38:35.650
내가 지난 1학년 때 기말고사보다 중간고사에
1.2배의 성적이 올랐어.

00:38:35.750 --> 00:38:41.577
그리고 내가 이번 중간고사에서
기말고사로 갈 때 성적이 1.5배가 올랐어.

00:38:41.677 --> 00:38:43.594
엄청나게 올랐죠,
처음에 어땠었길래.

00:38:43.694 --> 00:38:45.661
이렇게 1.2배, 1.5배 올랐어.

00:38:45.761 --> 00:38:47.882
그러면 총 몇 배 오른 거지?
라고 했을 때

00:38:47.982 --> 00:38:51.263
둘을 곱해서 √를 씌우면 기하평균이라는
거를 찾을 수가 있잖아요.

00:38:51.363 --> 00:38:54.404
그때는 1. 2+1.5
나누기 2를 하는 것보다는

00:38:54.504 --> 00:38:59.271
이렇게 곱한 것에 √를 씌우는 것이
좀 더 자연스러울 수 있겠죠.

00:38:59.371 --> 00:39:04.458
그런데 항상 더해서 나눈 것이

00:39:04.558 --> 00:39:08.395
둘을 곱해서 √를 씌운 것보다는
크거나 같다는 거예요.

00:39:08.495 --> 00:39:14.020
이 부등식이 매력적인 이유는
합과 곱이 나오기 때문입니다.

00:39:14.120 --> 00:39:17.818
우리가 합과 곱,
곱셈공식의 변형에서부터

00:39:17.918 --> 00:39:19.991
굉장히 잘 사용을 했어요.

00:39:20.091 --> 00:39:25.360
세상에는 의외로 실생활에 합과
곱이 주어지는 경우가 많습니다.

00:39:25.460 --> 00:39:29.103
그거를 변형해서 제곱+제곱이라는
거를 구하기도 했고요.

00:39:29.203 --> 00:39:32.901
합과 곱이 있으면 두 수를

근으로 갖는 이차방정식을

00:39:33.001 --> 00:39:35.445
근과 계수의 관계에 의해서
만들어내기도 했었죠.

00:39:35.545 --> 00:39:37.279
이런 부등식까지 있는 거예요.

00:39:37.379 --> 00:39:39.656
합과 곱에 대한 부등식이 있고.

00:39:39.756 --> 00:39:41.786
이제 얘를 증명하는
거를 같이 볼 거고요.

00:39:41.886 --> 00:39:46.450
사실 이 부분에서는 증명보다는
얘를 어떻게 활용할 것인가가

00:39:46.550 --> 00:39:48.906
더 중요한 포인트로 문제가
많이 나오거든요.

00:39:49.006 --> 00:39:51.572
그래서 어떻게 활용할 수
있는가까지도 보겠습니다.

00:39:51.672 --> 00:39:54.172
일단 증명은 역시 또
빼보는 거예요.

00:39:54.272 --> 00:39:57.574
2분의 a+b에서
√ab를 빼보겠습니다.

00:39:57.674 --> 00:40:03.225
그러면 이거는 2분의 a+b-2√ab가
된다고 할 수가 있고.

00:40:03.325 --> 00:40:06.872
여기서 a가 양수고
b가 양수이기 때문에

00:40:06.972 --> 00:40:09.233
우리가 어떤 이야기를
해줄 수 있냐면,

00:40:09.333 --> 00:40:12.497
a라는 것은 √a의 제곱이라고
할 수가 있어요.

00:40:12.597 --> 00:40:14.825
√a가 실수죠, a가
0보다 크니까.

00:40:14.925 --> 00:40:18.534
그다음에 b는 √b의
제곱이라고 할 수가 있고

00:40:18.634 --> 00:40:23.009

둘 다 양수니까 이렇게 양수
2개, √a, √b 곱해주면

00:40:23.109 --> 00:40:25.068
√ab로 그대로 나온다고 했었죠?

00:40:25.168 --> 00:40:27.668
둘 다 음수일 때는
-가 튀어나왔어요.

00:40:27.768 --> 00:40:32.141
그런데 둘 다 양수라고 하면
그냥 그대로 √ab 곱한 것이

00:40:32.241 --> 00:40:34.215
√ab와 같다고 했었고요.

00:40:34.315 --> 00:40:39.493
그러면 여기서 분자가 또 역시
완전제곱으로 바꾸는 게 기본이 된다고 했었잖아요.

00:40:39.593 --> 00:40:42.935
이렇게 빼준 것이 되어서
항상 완전제곱이니까

00:40:43.035 --> 00:40:44.564
0보다 크거나 같은 거예요.

00:40:44.664 --> 00:40:46.328
등호는 언제 성립할까요?

00:40:46.428 --> 00:40:48.928
√a랑 √b랑 같을 때니까

00:40:49.028 --> 00:40:51.500
그 √a랑 √b랑
같다는 것을 본다면

00:40:51.600 --> 00:40:56.971
제곱해서 a랑 b가 같을 때
성립한다는 것을 알 수가 있죠.

00:40:57.071 --> 00:41:00.349
그래서 증명, 이런 식으로
보여줄 수가 있고.

00:41:00.449 --> 00:41:02.977
이거를 증명할 수 있는 또
하나의 방법이 있어요.

00:41:03.077 --> 00:41:04.908
제가 교재에 이런 거 올려놨죠.

00:41:05.008 --> 00:41:07.368
이 그림 말고도 되게 많은
그림으로 나오게 되는데.

00:41:07.468 --> 00:41:09.440
반원을 생각해볼게요.

00:41:09.540 --> 00:41:12.612

여기 길이가 a이고
여기 길이가 b라고 해보겠습니다.

00:41:12.712 --> 00:41:16.265
그러면 이 원의 지름은 a+b예요.

00:41:16.365 --> 00:41:18.259
전체 지름을 봤을 때.

00:41:18.359 --> 00:41:20.528
그러면 반지름은 얼마인가요?

00:41:20.628 --> 00:41:25.355
이 반원의 반지름이 2분의
a+b가 되거든요.

00:41:25.455 --> 00:41:29.735
그러면 여기서의 중심을
찾아서 연결했을 때

00:41:29.835 --> 00:41:33.738
여기의 길이가 2분의 a+b가
된다고 할 수가 있어요.

00:41:33.838 --> 00:41:38.157
그런데 a, b가 애매하게 여기에
이렇게 그어져있다고 했을 때

00:41:38.257 --> 00:41:41.786
여기에 수직인 선분
하나를 그어볼게요.

00:41:41.886 --> 00:41:45.559
이렇게 수직인 선분을 그어서
이런 삼각형을 만들었습니다.

00:41:45.659 --> 00:41:50.407
여러분, 이 핑크색 삼각형을
보자마자 생각해야 될 것이 있어요.

00:41:50.507 --> 00:41:54.323
제가 지름에 대한
원주각을 만들었거든요.

00:41:54.423 --> 00:41:56.294
그러면 여기가 90도가 됩니다.

00:41:56.394 --> 00:42:00.000
여기가 90도가 된다는 여기
길이 어떻게 쓸 수가 있을까요?

00:42:00.100 --> 00:42:03.133
90도, 90도인
삼각형에서 성립하는

00:42:03.233 --> 00:42:06.596
굉장히 유명한 닮은
성질이 있었어요.

00:42:06.696 --> 00:42:09.684
닮음을 통해서 나오는 그 길이에

대한 성질이 있었습니다.

00:42:09.784 --> 00:42:12.357
우리 중학도형 정리했었던
14강이었나요?

00:42:12.457 --> 00:42:17.826
14강 아니었네요, 더
앞에서 같이 봤었어요.

00:42:17.926 --> 00:42:21.297
얘 곱하기 얘가 이거의
제곱이 돼요.

00:42:21.397 --> 00:42:23.708
그래서 여기의 길이가
√ab가 됩니다.

00:42:23.808 --> 00:42:25.559
그러면 ab가 어디 있든지

00:42:25.659 --> 00:42:29.574
여기서 수직인 직선을 그어서
나오는 값들이 √ab인데

00:42:29.674 --> 00:42:32.971
2분의 a+b는 항상 여기로
고정이 되어있어요.

00:42:33.071 --> 00:42:35.714
그러면 항상 파란색, 여기.

00:42:35.814 --> 00:42:41.695
반원을 생각했을 때 여기
지름을 따라서 가는

00:42:41.795 --> 00:42:45.836
어떤 수직이 되도록 하는
선분을 생각하더라도

00:42:45.936 --> 00:42:47.648
누가 가장 길어요?

00:42:47.748 --> 00:42:54.061
중심에서부터 이렇게 그은 2분의
a+b가 나머지 √ab보다는

00:42:54.161 --> 00:42:57.929
더 크거나 같다고 이야기를 해줄 수
있는데, 언제 같아지게 되나요?

00:42:58.029 --> 00:43:02.227
같은 순간을 생각해보면 여기가
a고 여기가 b일 때

00:43:02.327 --> 00:43:06.427
즉 a하고 b가 같을 때
서로 같아지게 되는 거예요.

00:43:06.527 --> 00:43:08.727
그래서 √ab가 아무리 노력해봐야

00:43:08.827 --> 00:43:12.540
2분의 a+b보다 작은데
언제 딱 같을 수 있느냐?

00:43:12.640 --> 00:43:15.142
양쪽 ab가 똑같을
때는 같다는 것입니다.

00:43:15.242 --> 00:43:19.688
이거를 이용해서 우리가 어떤 문제를
해결하게 되냐면 이런 거.

00:43:19.788 --> 00:43:21.416
이거는 가장 기본이에요.

00:43:21.516 --> 00:43:25.382
a가 0보다 크고
b가 0보다 클 때

00:43:25.482 --> 00:43:30.223
ab가 3이면 a+b의
최솟값이 얼마가 될 것이냐.

00:43:30.323 --> 00:43:32.916
갑자기 문제의 느낌이 확 달라졌죠?

00:43:33.016 --> 00:43:37.016
분명히 그냥 부등식 하나 봤을
뿐인데 갑자기 최솟값을 구하래요.

00:43:37.116 --> 00:43:40.060
이게 무슨 상황일까요?

00:43:40.160 --> 00:43:43.619
a+b의 최솟값을 구하라고
했는데, 합과 곱이 나왔잖아요.

00:43:43.719 --> 00:43:46.979
이제 합과 곱이
나오는데 양수라고 하면

00:43:47.079 --> 00:43:49.773
부등식 하나를 우리가
반드시 쓸 수 있는 것이

00:43:49.873 --> 00:43:52.328
2분의 a+b가 뭐보다
크거나 같다고요?

00:43:52.428 --> 00:43:55.150
√ab보다 크거나 같다는 거예요.

00:43:55.250 --> 00:43:59.460
그러면 2분의 a+b가
양변에 2를 곱해보면

00:43:59.560 --> 00:44:04.251
a+b가 2√ab보다 크거나
같다는 것을 의미하죠.

00:44:04.351 --> 00:44:06.948
그런데 ab가 얼마죠? 3이에요.

00:44:07.048 --> 00:44:10.664
그렇다면 a+b가 뭐보다
크거나 같은 거죠?

00:44:10.764 --> 00:44:14.050
2√3보다 크거나 같다는
것을 의미합니다.

00:44:14.150 --> 00:44:16.354
얘보다 늘 크거나 같대요.

00:44:16.454 --> 00:44:18.525
그러면 최솟값이 얼마일까요?

00:44:18.625 --> 00:44:23.496
아무리 작아봐야 2√3보다
작을 수가 없는 거고.

00:44:23.596 --> 00:44:26.288
이게 정말 최솟값으로서
의미를 가지려면

00:44:26.388 --> 00:44:29.869
등호가 성립되도록 하는 값이
존재하느냐를 봐야 돼요.

00:44:29.969 --> 00:44:31.475
그러니까 무슨 뜻이냐면

00:44:31.575 --> 00:44:34.130
a+b가 2√3보다
크거나 같다고 한다면

00:44:34.230 --> 00:44:38.040
사실 √3보다 크거나 같다는
부등식도 성립하는 거잖아요.

00:44:38.140 --> 00:44:39.975
2√3보다 어떤 게 크거나 같아요.

00:44:40.075 --> 00:44:42.417
그러면 √3보다 크거나
같다고 할 수가 있죠.

00:44:42.517 --> 00:44:47.059
그런데 실제로 여기의 값을 가질 수
있느냐를 확인해봐야 되거든요.

00:44:47.159 --> 00:44:50.178
그러려면 여기 막혀있는
값, √3이라는 것과

00:44:50.278 --> 00:44:54.331
이 등호가 성립하도록 하는 값이
존재하는가를 생각해봐야 되는데.

00:44:54.431 --> 00:44:56.430
이 경우에는 존재하지 않아요.

00:44:56.530 --> 00:44:58.880
그런데 이때는 우리가 존재한다는
거를 안다는 거죠.

00:44:58.980 --> 00:45:00.406
어떨 때 존재하죠?

00:45:00.506 --> 00:45:04.054
이게 존재하는 경우는 a하고
b하고 같을 때라고 했어요.

00:45:04.154 --> 00:45:09.132
그런데 지금 만약에 2개의
최솟값이 2√3으로 존재한다면

00:45:09.232 --> 00:45:10.843
더한 것이 2√3이잖아요.

00:45:10.943 --> 00:45:15.272
2개가 똑같은데 더해서
2√3이 되도록 하려면

00:45:15.372 --> 00:45:17.886
ab의 값은 각각이 √3이면 되죠.

00:45:17.986 --> 00:45:21.221
그러면 곱해서 3이 나오고
더해서 2√3이 나오고.

00:45:21.321 --> 00:45:23.763
이것이 바로 최솟값으로
나오게 됩니다.

00:45:23.863 --> 00:45:27.885
그래서 합과 곱이 나오는 대표적인
문제가 어떤 상황이냐면,

00:45:27.985 --> 00:45:30.100
이런 거를 생각하면 돼요.

00:45:30.200 --> 00:45:33.079
여기가 a이고 여기의
길이가 b예요.

00:45:33.179 --> 00:45:47.238
넓이가 3이 되도록 하는 직사각형의
닭장을 만드는 거예요.

00:45:47.338 --> 00:45:51.586
넓이가 3은 되어야 하는데 둘레가,

00:45:51.686 --> 00:45:54.468
닭장을 만드려면 울타리를
써야 되잖아요?

00:45:54.568 --> 00:45:57.602
그 울타리의 비용을 아끼기 위해서

00:45:57.702 --> 00:46:02.454
둘레의 최솟값은 얼마로 할 수

있을 것인가를 생각해보면

00:46:02.554 --> 00:46:06.867
직사각형의 둘레라는 것은
2(a+b)가 되죠.

00:46:06.967 --> 00:46:09.780
이 넓이가 3이 되어야 하니까,

00:46:09.880 --> 00:46:12.457
일단 a+b를 생각했을 때

00:46:12.557 --> 00:46:15.127
이게 2√ab보다 크거나 같은데

00:46:15.227 --> 00:46:17.018
이게 2√3이 된다는 거예요.

00:46:17.118 --> 00:46:20.314
등호는 a랑 b랑 모두
√3일 때 성립해요.

00:46:20.414 --> 00:46:27.239
그러니까 얘가 양변에 2를 곱해주면
4√3보다 크거나 같다고 되어서

00:46:27.339 --> 00:46:30.272
그 직사각형의 둘레의
최솟값은 4√3이 되고

00:46:30.372 --> 00:46:32.990
그때 한 변의 길이는
√3이 되도록 하는

00:46:33.090 --> 00:46:36.291
정사각형을 만들어주면
된다고 나오는 것이죠.

00:46:36.391 --> 00:46:39.137
그래서 이렇게 합과 곱이 나왔을 때.

00:46:39.237 --> 00:46:44.428
지금 같은 경우에 곱이 일정했어요.

00:46:44.528 --> 00:46:49.924
곱이 일정한 경우

00:46:50.024 --> 00:46:56.921
곱이 만약에 l로 일정하다고
생각해보겠습니다.

00:46:57.021 --> 00:47:03.604
두 양수 a, b의
곱이 일정하다고 한다면

00:47:03.704 --> 00:47:08.924
2분의 a+b가 √ab보다
크거나 같은데

00:47:09.024 --> 00:47:13.061
그러면 a+b는 2√ab보다

크거나 같고요.

00:47:13.161 --> 00:47:15.992
이거의 값이 2√l이
된다는 거예요.

00:47:16.092 --> 00:47:18.921
그렇기 때문에 a+b의 최솟값을

00:47:19.021 --> 00:47:21.541
우리가 얼마로 찾을 수가 있죠?

00:47:21.641 --> 00:47:25.206
얘가 2√l보다는 크거나
같다고 하는 것이니까

00:47:25.306 --> 00:47:27.618
바로 2√l로 찾을 수가 있고.

00:47:27.718 --> 00:47:29.774
이 값이 실제로 존재하느냐?

00:47:29.874 --> 00:47:35.118
그때 a하고 b의 값을 구해본다면
각각 √l로 존재하는 거죠.

00:47:35.218 --> 00:47:38.830
그래서 이런 식으로
곱이 일정한 경우에

00:47:38.930 --> 00:47:41.367
합의 최솟값을 찾을 수가 있습니다.

00:47:41.467 --> 00:47:45.073
이번에는 합이 일정한
경우를 생각해볼까요?

00:47:45.173 --> 00:47:48.259
합이 일정한 게 주어져있을
수도 있어요.

00:47:48.359 --> 00:47:52.502
그래서 그 합이 s로
주어져있다고 생각해보겠습니다.

00:47:52.602 --> 00:47:57.874
그러면 2분의 a+b가 또
√ab보다 크거나 같은데

00:47:57.974 --> 00:48:01.617
2분의 s보다 √ab가
작거나 같잖아요?

00:48:01.717 --> 00:48:05.546
ab는 4분의 s²보다
항상 작거나 같거든요.

00:48:05.646 --> 00:48:09.697
얘가 아무리 커져 봐야
4분의 s²이라는

00:48:09.797 --> 00:48:12.152
이 값보다 더 커질 수가 없어요.

00:48:12.252 --> 00:48:15.360
이거보다 더 작거나 같은
곳에 위치하게 됩니다.

00:48:15.460 --> 00:48:18.324
그러면 마지노선이 어디죠?
4분의 s^2

00:48:18.424 --> 00:48:22.335
제일 커져 봤자 4분의 s^2까지
밖에 가지 못하는 거예요.

00:48:22.435 --> 00:48:27.493
그래서 이 경우에는 ab의
최댓값을 구할 수가 있겠네요.

00:48:27.593 --> 00:48:30.318
곱이 일정할 때는 합의 최솟값.

00:48:30.418 --> 00:48:34.059
합이 일정할 때는 곱의
최댓값을 구할 수가 있고.

00:48:34.159 --> 00:48:36.883
그게 바로 4분의 s^2이라고
나오게 되고요.

00:48:36.983 --> 00:48:41.116
그때 a하고 b하고는 각각
2분의 s가 되겠죠.

00:48:41.216 --> 00:48:45.760
둘을 꼭 똑같은 거를 곱해서 4분의
s^2이 나오게 되는 것이니까.

00:48:45.860 --> 00:48:48.763
이게 4분의 s^2이
된다, $2\sqrt{l}$이 된다.

00:48:48.863 --> 00:48:50.335
이거를 외울 필요는 없고.

00:48:50.435 --> 00:48:53.824
합, 곱이 같이 양수로 나왔을
때 이 부등식을 생각해주세요.

00:48:53.924 --> 00:48:56.663
그리고 합이 일정할 때 곱의 최대,

00:48:56.763 --> 00:49:00.292
곱이 일정할 때 합의
최소를 구할 수가 있고.

00:49:00.392 --> 00:49:05.196
어떤 하나라도 일정하지 않으면
이 부등식의 의미가 없어요.

00:49:05.296 --> 00:49:07.502

하나가 딱 일정하게 값이 있어야지만

00:49:07.602 --> 00:49:12.262
등호가 성립하는 값을
찾을 수 있게 됩니다.

00:49:12.362 --> 00:49:15.108
이번에는 이거의 최솟값을
구하라고 했어요.

00:49:15.208 --> 00:49:19.825
그러면 이 식이 2개가
곱해져있는 형태이기 때문에

00:49:19.925 --> 00:49:21.545
일단 전개를 해보도록 하겠습니다.

00:49:21.645 --> 00:49:23.328
이렇게 곱해서 1 나오죠?

00:49:23.428 --> 00:49:25.111
이렇게 곱해서 ab 나오죠?

00:49:25.211 --> 00:49:28.931
그다음에 이렇게 곱해서 4ab분의
1이 나오게 되고요.

00:49:29.031 --> 00:49:31.827
이렇게 둘을 곱해서 4분의
1이 나왔습니다.

00:49:31.927 --> 00:49:37.977
그러면 이거는
5+ab+1/4ab인데

00:49:38.077 --> 00:49:41.545
a하고 b하고 모두
양수라고 했어요.

00:49:41.645 --> 00:49:44.086
그러면 ab가 양수가 되겠죠.

00:49:44.186 --> 00:49:46.284
곱이 일정하게 나오지는 않았지만

00:49:46.384 --> 00:49:48.696
여기 보니까 서로 역수
관계가 있습니다.

00:49:48.796 --> 00:49:51.848
그렇기 때문에 얘는 어떻게 되느냐?

00:49:51.948 --> 00:49:57.376
ab+1/4ab를 가지고
생각을 해본다면

00:49:57.476 --> 00:50:01.867
이거를 하나의 수, 이거를 또
하나의 수로 생각했을 때

00:50:01.967 --> 00:50:05.473

얘 나누기 2를 해준 것이
뭐보다 크거나 같죠?

00:50:05.573 --> 00:50:09.269
2√ 2개를 곱한 것과
같아지는 거예요.

00:50:09.369 --> 00:50:13.930
둘을 곱해보면 여기
ab, 1/4ab

00:50:14.030 --> 00:50:15.218
이렇게 나오거든요.

00:50:15.318 --> 00:50:17.490
그러면 여기 속에서
4분의 1이 되죠?

00:50:17.590 --> 00:50:23.756
2*√1/4이 되니까 2*1/2이
되면서 1보다 크거나 같습니다.

00:50:23.856 --> 00:50:28.072
그러면 ab+1/4ab은
뭐보다 크거나 같은 거죠?

00:50:28.172 --> 00:50:31.118
여기 2가 넘어왔다고 생각해보면

00:50:31.218 --> 00:50:35.026
2보다 크거나 같다고 이야기를
해줄 수가 있는 거죠.

00:50:35.126 --> 00:50:39.035
그래서 얘가 2보다
크거나 같다고 한다면

00:50:39.135 --> 00:50:43.727
여기서 이것은 5+2보다
크거나 같아지게 되니까.

00:50:43.827 --> 00:50:47.427
5는 상수로 일정하고 이 부분이
2보다 크거나 같았기 때문에

00:50:47.527 --> 00:50:53.491
얘가 7보다 크거나 같다고 이야기를
해줄 수가 있게 되는 거예요.

00:50:53.591 --> 00:51:02.351
그래서 이런 식으로 최솟값을 찾는
경우를 생각해줄 수 있는데.

00:51:02.451 --> 00:51:04.352
죄송해요, 제가 여기서
계산을 잘못했죠?

00:51:04.452 --> 00:51:06.780
1과 1/4을 더했어요.

00:51:06.880 --> 00:51:09.755

여기가 5가 아니라
5/4가 되어야 합니다.

00:51:09.855 --> 00:51:13.771
그래서 여기서 5/4하고
2를 더해주는 거죠.

00:51:13.871 --> 00:51:17.044
그러면 9/4로 나오게 되겠죠.

00:51:17.144 --> 00:51:18.674
계산 조심해서 보시고요.

00:51:18.774 --> 00:51:21.938
이렇게 나오게 되는데
이게 교과서마다,

00:51:22.038 --> 00:51:25.063
저는 이거를 보는 게
더 헷갈릴 것 같은데

00:51:25.163 --> 00:51:27.735
교과서에 이게 참
많이 나와 있어요.

00:51:27.835 --> 00:51:30.179
그래서 잠시 소개를
해드리도록 할게요.

00:51:30.279 --> 00:51:33.593
얘를 잘못 푸는 경우에
대한 예인데,

00:51:33.693 --> 00:51:36.373
이렇게 생각을 하기도 하나봐요.

00:51:36.473 --> 00:51:40.558
저는 여러분이 이렇게 생각하지
않을 거라고 생각하는데.

00:51:40.658 --> 00:51:47.475
일단 이거를 보면
2√a*1/4ab보다 크거나 같죠.

00:51:47.575 --> 00:51:50.846
그렇고 이거 나누기 2가 둘을
곱한 것보다 크거나 같으니까

00:51:50.946 --> 00:51:53.449
2를 넘겨보면 이렇게
우리가 써줄 수가 있죠.

00:51:53.549 --> 00:52:00.024
1/a+b는 2√1/a*b보다
크거나 같죠.

00:52:00.124 --> 00:52:08.880
얘는 2*√a/2√b보다
크거나 같고.

00:52:08.980 --> 00:52:15.519

얘는 2*√b/√a보다 크거나
같아서 둘을 곱했을 때

00:52:15.619 --> 00:52:19.538
얘네 둘을 곱하고
있으니까 둘을 곱한 것은

00:52:19.638 --> 00:52:23.405
각각 여기의 경계를
곱한 것과 같아서

00:52:23.505 --> 00:52:26.412
그러면 이렇게 이렇게
해보게 된다면,

00:52:26.512 --> 00:52:28.152
여기도 2가 있었죠?

00:52:28.252 --> 00:52:32.990
이렇게 해본다면 이게 약분이 되면서
값이 2가 나오게 될 것이다.

00:52:33.090 --> 00:52:36.891
그 최솟값이 2라고 푸는
학생 혹시 있나요?

00:52:36.991 --> 00:52:39.935
이거는 명백하게 틀린 풀이거든요.

00:52:40.035 --> 00:52:45.590
왜 틀렸냐면 여기서 일단 등호가
성립하는 경우가 언제냐면,

00:52:45.690 --> 00:52:47.266
곱이 일정하지도 않아요.

00:52:47.366 --> 00:52:51.161
계속 바뀌기 때문에
등호가 성립하는 경우가

00:52:51.261 --> 00:52:53.495
a랑 4b분의 1이
같을 때입니다.

00:52:53.595 --> 00:52:57.914
여기서 등호가 성립하는 경우는 a분의
1와 b가 같을 때 경우예요.

00:52:58.014 --> 00:53:03.178
그러면 이때는 어떤 일이
벌어지냐면 4ab가 1이고요.

00:53:03.278 --> 00:53:07.423
이때는 ab가 1인데,
이게 동시 성립 불가해요.

00:53:07.523 --> 00:53:09.471
동시에 성립할 수 있느냐?

00:53:09.571 --> 00:53:13.703
ab를 곱한 것이 1이면서 동시에

4분의 1일 수가 있나요?

00:53:13.803 --> 00:53:16.721
불가능한데, 지금 여기서
등호가 연결됐을 때

00:53:16.821 --> 00:53:19.937
얘도 최소고 얘도 최소라는
것으로 연결해준 거잖아요.

00:53:20.037 --> 00:53:22.397
이렇게 최솟값을 가질
수는 없는 것이죠.

00:53:22.497 --> 00:53:24.533
식이 2개가 동시에 나왔다.

00:53:24.633 --> 00:53:27.545
같은 a, b에 대해서 같은
맥락에서 나왔다고 한다면

00:53:27.645 --> 00:53:30.110
각각에 대해서 최솟값을 구했을 때.

00:53:30.210 --> 00:53:34.168
만약에 여기서 계수가 이게 4분의
1이 아니라 b분의 1이었어요.

00:53:34.268 --> 00:53:35.736
그러면 이렇게 풀 수 있겠죠.

00:53:35.836 --> 00:53:38.433
얘랑 얘랑 같은 순간과 얘랑
얘가 같은 순간이 같으니까.

00:53:38.533 --> 00:53:40.504
그런데 일반적인 맥락에서

00:53:40.604 --> 00:53:44.188
이렇게 같은 등호가
성립하는 경우가 다르다면

00:53:44.288 --> 00:53:48.843
절대 이런 식으로 산술기하평균
부등식을 적용할 수는 없는 것이고.

00:53:48.943 --> 00:53:51.658
전체적으로 전개를 해놓고

00:53:51.758 --> 00:53:55.022
이렇게 정확하게 얘네들의
곱이 일정한 상황에서

00:53:55.122 --> 00:53:57.039
사용을 해줘야 되는 것입니다.

00:53:57.139 --> 00:53:59.740
이것도 교과서의 예로 많이 나오고

00:53:59.840 --> 00:54:01.545
이렇게 증명하라, 까지 나오고.

00:54:01.645 --> 00:54:03.532
이거를 적용해서도 마찬가지로

00:54:03.632 --> 00:54:06.556
최대, 최소를 구할 수 있는
문제가 나올 수는 있는데.

00:54:06.656 --> 00:54:08.089
별로 그렇게 나오지는 않아서

00:54:08.189 --> 00:54:10.480
그냥 증명만 같이 해보고
넘어가도록 할게요.

00:54:10.580 --> 00:54:13.426
나중에 여러분이
기하라는 거를 배우면

00:54:13.526 --> 00:54:17.049
그 기하에서 벡터를 이용해서도
증명해줄 수 있는 내용인데

00:54:17.149 --> 00:54:19.420
이번에는 a, b,
x, y가 실수입니다.

00:54:19.520 --> 00:54:23.690
그때 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)$이

00:54:23.790 --> 00:54:27.638
$(ax+by)^2$보다
크거나 같다는 거예요.

00:54:27.738 --> 00:54:30.462
여기 계수 제곱, 여기
계수 제곱 더한 것과

00:54:30.562 --> 00:54:32.934
이 계수 제곱 더하기
이 계수 제곱 더한 것이

00:54:33.034 --> 00:54:36.580
각각을 곱한 다음에 더한 거를 제곱한
것보다 크거나 같다는 것인데.

00:54:36.680 --> 00:54:43.402
그러면 부등식 증명하는 기본으로서
역시 또 한번 빼보도록 할게요.

00:54:43.502 --> 00:54:46.137
여기에서 이거를 빼보겠습니다.

00:54:46.237 --> 00:54:48.054
그러면 전개를 해본다면

00:54:48.154 --> 00:54:54.424
$a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2$

00:54:54.524 --> 00:54:55.751
이렇게 나오죠?

00:54:55.851 --> 00:55:02.235
그다음에 이렇게 되었어요.

00:55:02.335 --> 00:55:05.128
그러면 기분좋게 얘랑
얘랑 지워지게 되고

00:55:05.228 --> 00:55:06.759
이거랑 이거랑 지워지죠?

00:55:06.859 --> 00:55:13.456
남은 것을 보니까
$a^2y^2-2abxy+b^2y^2$이 남았거든요.

00:55:13.556 --> 00:55:17.755
가만히 보니까 여기서
ay가 있어요.

00:55:17.855 --> 00:55:19.640
여기 ay있죠?

00:55:19.740 --> 00:55:28.119
그리고 남아있는 부분을 본다면

00:55:28.219 --> 00:55:31.051
전개를 뭔가 잘못한 것
같아요, 죄송해요.

00:55:35.223 --> 00:55:38.611
여기를 지울 때 b^2x^2이랑
지우는 것이 아니라

00:55:38.711 --> 00:55:40.710
b^2y^2을 지웠어야 되죠.

00:55:40.810 --> 00:55:43.701
남아있는 부분이 여기서
b^2x^2이 됩니다.

00:55:43.801 --> 00:55:46.692
그래서 여기서 bx가 있고

00:55:46.792 --> 00:55:49.115
b^2x^2이 남아있는 거예요.

00:55:49.215 --> 00:55:55.983
그렇다면 얘는 $(ay-bx)^2$이라고
나오게 되고.

00:55:56.083 --> 00:55:58.885
역시 또 실수를 제곱한
것이 나왔어요.

00:55:58.985 --> 00:56:01.576
a, b, x, y가
실수라는 조건이 있었잖아요.

00:56:01.676 --> 00:56:04.792
그렇기 때문에 0보다 크거나
같다고 해줄 수가 있고요.

00:56:04.892 --> 00:56:08.690
등호가 성립하는 경우는
ay가 bx랑 같은 경우.

00:56:08.790 --> 00:56:12.461
즉 x분의 y랑 a분의 b가
같다고 할 수 있어요.

00:56:12.561 --> 00:56:16.150
a:b하고 x:y하고
서로 같은 경우.

00:56:16.250 --> 00:56:20.207
b가 일정하게 얘 대 얘와
얘 대 얘가 일정한 경우에

00:56:20.307 --> 00:56:22.893
등호가 성립하게 된다는 것까지
보여줄 수가 있습니다.

00:56:22.993 --> 00:56:27.408
이런 부등식도 이용해서 최대,
최소를 구하는 문제도 있기는 한데

00:56:27.508 --> 00:56:31.428
문제로써 나올 가능성은 많이
없어서 연습문제는 안 풀어보고

00:56:31.528 --> 00:56:34.851
바로 개념 확인문제로
넘어가보도록 하겠습니다.

00:56:34.951 --> 00:56:37.670
이제 어떤 명제에 a,
b, c가 자연수일 때

00:56:37.770 --> 00:56:40.122
$a^2+b^2=c^2$이면

00:56:40.222 --> 00:56:43.810
우리가 딱 생각하는 거는
피타고라스 정리인데요.

00:56:43.910 --> 00:56:45.473
그런데 이때 a, b, c 중

00:56:45.573 --> 00:56:48.142
적어도 하나는 짝수여야 된다는
거를 증명하라고 했어요.

00:56:48.242 --> 00:56:51.690
그러면 여기서부터 출발해서
적어도 하나가 짝수이다.

00:56:51.790 --> 00:56:54.063
가려고 생각해보면 너무 어렵죠.

00:56:54.163 --> 00:56:56.704
$a^2+b^2=c^2$이 나올 수 있는.

00:56:56.804 --> 00:56:58.529
그리고 짝, 홀을 이야기하려면

00:56:58.629 --> 00:57:02.395
a, b, c 각각을 2k 이런 식으로
설정을 해놓고 봐야 될 텐데.

00:57:02.495 --> 00:57:07.531
이게 성립한다는 것만으로
식을 설정하기가 애매한데.

00:57:07.631 --> 00:57:10.442
만약 여기서 출발한다면 좀
쉽게 볼 수가 있을 거예요.

00:57:10.542 --> 00:57:15.674
그렇기 때문에 대우명제를 사용해서
증명을 하게 되었습니다.

00:57:15.774 --> 00:57:22.431
만약에 보면 대우가 참이므로
주어진 명제도 참이다.

00:57:22.531 --> 00:57:24.094
이렇게 이야기를 하고 있죠.

00:57:24.194 --> 00:57:29.886
대우명제를 사용해주려면 이거 결론을
부정을 해봐야 될 거예요.

00:57:29.986 --> 00:57:33.023
a, b 중 적어도
하나가 짝수이다.

00:57:33.123 --> 00:57:35.070
이거의 부정은 뭘까요?

00:57:35.170 --> 00:57:37.545
이게 언제 참이 아닌 거죠?

00:57:37.645 --> 00:57:41.614
a, b, c 중 적어도
하나가 짝수라는 거는

00:57:41.714 --> 00:57:44.212
a가 짝수거나 b가
짝수거나 c가 짝수거나

00:57:44.312 --> 00:57:47.726
2개가 짝수거나 3개가 짝수거나
이렇게 나오게 되는 것인데.

00:57:47.826 --> 00:57:54.495
a, b, c 모두
홀수이다, 라는 것이

00:57:54.595 --> 00:58:00.102
이 결론을 부정한
내용이 될 거예요.

00:58:00.202 --> 00:58:03.529

그래서 a, b, c가 자연수일 때

00:58:03.629 --> 00:58:09.082
a, b, c가 모두 홀수라고
한번 가정을 해보는 거죠.

00:58:09.182 --> 00:58:13.490
그렇다면 a^2+b^2은
어떻게 될 것이냐?

00:58:13.590 --> 00:58:16.477
a, b, c가 모두
홀수라고 했으니까

00:58:16.577 --> 00:58:18.991
a를 2k+1이라고 하고

00:58:19.091 --> 00:58:22.006
b를 2l+1이라고 하고

00:58:22.106 --> 00:58:24.914
c를 2m+1이라고 써볼게요.

00:58:25.014 --> 00:58:29.314
이때 k, l, m은 0 이상의
정수라고 해줄 수가 있겠죠.

00:58:29.414 --> 00:58:34.709
그러면 이때 a^2+b^2을 적어본다면

00:58:34.809 --> 00:58:38.868
$(2k+1)^2+(2l+1)^2$이
됩니다.

00:58:38.968 --> 00:58:43.459
그러면 얘는 $4k^2+4k+1$과

00:58:43.559 --> 00:58:48.123
$4l^2+4l+1$이 되니까

00:58:48.223 --> 00:58:52.549
2로 묶어냈을 때 우리가
짝, 홀을 보여주려고 한다면

00:58:52.649 --> 00:58:55.122
2로 묶어내서 생각을
해보게 되는데.

00:58:55.222 --> 00:58:57.057
둘 더한 게 1이잖아요?

00:58:57.157 --> 00:58:59.375
그러니까 1까지 묶여나오게 되면서

00:58:59.475 --> 00:59:01.919
2 곱하기 자연수 형태로
정리가 되었죠.

00:59:02.019 --> 00:59:04.979
2 곱하기 자연수 형태가 되었으니까

00:59:05.079 --> 00:59:09.620
이 결과는 결국 짝수가
된다고 할 수가 있어요.

00:59:09.720 --> 00:59:12.062
a^2+b^2은 짝수입니다.

00:59:12.162 --> 00:59:17.113
직관적으로 쉽게 여기 네모 칸
채우기 위한 답으로 생각해본다면

00:59:17.213 --> 00:59:19.923
a가 홀수이고 b가 홀수예요.

00:59:20.023 --> 00:59:22.572
그러면 a^2도 홀수고
b^2도 홀수죠.

00:59:22.672 --> 00:59:25.215
왜냐하면 홀수와 홀수를
곱한 게 홀수니까.

00:59:25.315 --> 00:59:28.735
그런데 두 홀수를 더한
것은 뭐가 됐었죠?

00:59:28.835 --> 00:59:30.661
바로 짝수라는 것이에요.

00:59:30.761 --> 00:59:35.101
그래서 a^2+b^2의 수의 정체를
봤을 때는 짝수가 되고.

00:59:35.201 --> 00:59:37.882
c^2은 홀수를 제곱한 것이기 때문에

00:59:37.982 --> 00:59:41.030
홀수와 홀수를 곱한
결과 홀수가 되죠.

00:59:41.130 --> 00:59:44.227
그러면 a^2+b^2은 짝수인데

00:59:44.327 --> 00:59:47.400
c^2이 홀수라면 2개가
같을 수가 있겠어요?

00:59:47.500 --> 00:59:49.404
같을 수가 없는 것이죠.

00:59:49.504 --> 00:59:51.540
그래서 a, b, c가 자연수일 때

00:59:51.640 --> 00:59:54.579
a, b, c가 모두
홀수라면 같을 수가 없으니까

00:59:54.679 --> 00:59:58.913
이 가정이 부정이
되게 나오게 되죠.

00:59:59.013 --> 01:00:03.683
결론을 부정했더니 가정을 부정한
결과가 나오게 되었습니다.

01:00:03.783 --> 01:00:07.493
그러면 대우명제에 의해서
참이라고 할 수 있는 거죠.

01:00:07.593 --> 01:00:10.367
그래서 여기 올바른 답을 찾는다면

01:00:10.467 --> 01:00:13.993
a, b, c가 모두 홀수이고

01:00:14.093 --> 01:00:17.576
그다음에 여기 짝수, 홀수 이렇게
들어간 것을 찾으면 되겠네요.

01:00:17.676 --> 01:00:20.154
그래서 답은 4번이 나오게 됩니다.

01:00:20.254 --> 01:00:22.764
이제 2번에서는
두 실수 a, b에 대해서

01:00:22.864 --> 01:00:25.226
a, b의 곱이 일정하게 8이에요.

01:00:25.326 --> 01:00:29.921
그러면 a^2+4b^2에
대한 부등식을 적었을 때

01:00:30.021 --> 01:00:32.520
아까 부등식의 모양이
어떻게 생겼냐면

01:00:32.620 --> 01:00:36.927
2분의 a+b가 √ab보다
늘 크거나 같다고 했어요.

01:00:37.027 --> 01:00:42.028
이 포맷에 맞게 적어본다면 a^2이
지금 a의 역할을 하는 거고요.

01:00:42.128 --> 01:00:45.376
$4b^2$이 b의 역할을
한다고 볼 수가 있어요.

01:00:45.476 --> 01:00:49.905
그러면 이거를 나누기 2해준
것은 누구보다 크거나 같죠?

01:00:50.005 --> 01:00:52.625
√ 이 둘 곱해준 거.

01:00:52.725 --> 01:00:58.023
a^2과 $4b^2$을 곱한 것과 서로
크거나 같아지게 된다는 거죠.

01:00:58.123 --> 01:01:01.060
그래서 여기를 계산해보게 되면

01:01:01.160 --> 01:01:04.423
얘는 $4a^2b^2$이 되죠?

01:01:04.523 --> 01:01:09.857
그러면 $\sqrt{4}$에서 4가
밖으로 2로 나오게 되고

01:01:09.957 --> 01:01:13.794
a^2b^2에 $\sqrt{}$ 씌운 거는
ab 자체가 양수였기 때문에

01:01:13.894 --> 01:01:16.204
그냥 2ab로 나오게 됩니다.

01:01:16.304 --> 01:01:18.066
그런데 ab가 8이라고 했어요.

01:01:18.166 --> 01:01:20.669
그러면 2ab는 16이 되겠죠?

01:01:20.769 --> 01:01:27.503
그래서 2분의 a^2+4b^2이 16보다
크거나 같게 나오게 되고요.

01:01:27.603 --> 01:01:32.107
a^2+4b^2은 32보다
크거나 같은 거예요.

01:01:32.207 --> 01:01:35.415
그러면 최솟값이 32라고
해줄 수가 있죠.

01:01:35.515 --> 01:01:39.769
그때 a^2과 $4b^2$은
모두 값이 얼마가 되죠?

01:01:39.869 --> 01:01:42.067
16으로 나오게 됩니다.

01:01:42.167 --> 01:01:47.149
a^2, $4b^2$ 2개가 같을 때
등호가 성립하는 거니까.

01:01:47.249 --> 01:01:50.440
2개가 같은데 더해서
32가 되었어요.

01:01:50.540 --> 01:01:53.073
그러면 각각이 16일
수밖에 없겠죠.

01:01:53.173 --> 01:01:56.636
그리고 a는 그때 ± 4, b는 ± 2

01:01:56.736 --> 01:01:58.409
이런 식으로 나오게 될 텐데,

01:01:58.509 --> 01:02:01.529
지금 이 부등식 자체
a, b는 실수였지만

01:02:01.629 --> 01:02:04.907
a^2이 양수이고 0보다 커요.

01:02:05.007 --> 01:02:06.808
왜냐하면 둘 곱해서 8이 되었죠.

01:02:06.908 --> 01:02:09.642
0이 아니라는 거니까
a^2이 0보다 크고

01:02:09.742 --> 01:02:11.790
a, b가 실수라고 한다면

01:02:11.890 --> 01:02:15.131
얘네들을 제곱한 것은
각각 0보다 크고

01:02:15.231 --> 01:02:18.830
지금 제곱에 대한 것을 더해서
나누고 곱하고 했기 때문에

01:02:18.930 --> 01:02:25.895
이제 양수에 대해서 성립하는 산술기하
부등식을 잘 적용해줄 수가 있습니다.

01:02:25.995 --> 01:02:30.018
이제 24-3번에서는 양수
a라고 잘 밝혀줬죠.

01:02:30.118 --> 01:02:31.973
얘의 최솟값을 구하라고 했는데,

01:02:32.073 --> 01:02:35.143
뭔가 앞의 문제는 그래도 곱을
줬는데 여기에 곱이 없어요.

01:02:35.243 --> 01:02:37.095
그런데 곱이 없는 건가요?

01:02:37.195 --> 01:02:40.186
가만히 보면 4a+1/a

01:02:40.286 --> 01:02:44.691
서로 역수 관계에 있는 수들의
상수배를 해놓은 거예요.

01:02:44.791 --> 01:02:47.292
그렇기 때문에 얘네를 봤을 때

01:02:47.392 --> 01:02:50.208
이제 한 번에 빨리 보도록
하기 위해서 이렇게 갈게요.

01:02:50.308 --> 01:02:53.326
2분의 a+b가 √ab보다

01:02:53.426 --> 01:02:55.761
크거나 같은 부등식이
성립한다고 했어요.

01:02:55.861 --> 01:02:59.221
그러면 a+b가
2√ab보다 크거나 같다.

01:02:59.321 --> 01:03:02.958
이렇게 기억을 해놓는 것도 하나의
효율적인 방법이 되겠죠.

01:03:03.058 --> 01:03:05.517
그래서 이렇게 2개를 더한 것.

01:03:05.617 --> 01:03:10.015
4a하고 1/a,
2개를 더해준 것은

01:03:10.115 --> 01:03:16.531
비교했을 때 2√ 둘을 곱해준 것과
크거나 같아지게 되는 거예요.

01:03:16.631 --> 01:03:21.433
우리 여기에 4a와
a분의 1이 들어가게 되고요.

01:03:21.533 --> 01:03:25.783
계산을 해보면 √4가 2로
나오면서 4가 되겠죠.

01:03:25.883 --> 01:03:27.686
+1은 5가 된다.

01:03:27.786 --> 01:03:31.344
그래서 최솟값은 바로 5가
되는 것을 찾을 수가 있고요.

01:03:31.444 --> 01:03:34.362
그러면 이때 a의 값은
얼마가 될 것이냐?

01:03:34.462 --> 01:03:36.534
2개가 같으면 되는 거예요.

01:03:36.634 --> 01:03:41.376
4a랑 a분의 1이랑 같고 그
합이 4로 나오게 되는 것이니까.

01:03:41.476 --> 01:03:43.992
지금 얘가 같은 부분은 4인 거죠.

01:03:51.088 --> 01:03:55.299
2개를 더해서 4니까 각각의
값은 2가 되면 되는 거죠.

01:03:55.399 --> 01:03:59.322
얘랑 얘랑 더해서 4가 되었고
둘이 같다고 했기 때문에

01:03:59.422 --> 01:04:02.249
이거랑 이거랑 모두 2로 같고

01:04:02.349 --> 01:04:05.617
그러면 a의 값을 구했을

때는 2분의 1이 되겠죠.

01:04:05.717 --> 01:04:08.656
양수 a의 값이 2분의
1일 때 최솟값,

01:04:08.756 --> 01:04:10.769
둘을 더한 최솟값은 4가 되고

01:04:10.869 --> 01:04:13.279
거기에 1까지 더해주자고 했으니까

01:04:13.379 --> 01:04:16.507
1 마저 더해서 최솟값은 최종적으로
5가 나온다고 할 수가 있습니다.

01:04:16.607 --> 01:04:20.259
이번에는 a가 1보다
크다고 했어요.

01:04:20.359 --> 01:04:23.530
그때 이거의 최솟값을
구하라고 했는데,

01:04:23.630 --> 01:04:26.318
그러면 곱이 일정한
상황이 나와야 되는데.

01:04:26.418 --> 01:04:29.031
지금 보니까 역수가 아니거든요.

01:04:29.131 --> 01:04:32.591
그러면 못 구할까요?
한번 생각해보세요.

01:04:32.691 --> 01:04:34.945
식을 변형하면 됩니다.

01:04:35.045 --> 01:04:36.891
어떻게 변형을 할까요?

01:04:36.991 --> 01:04:41.341
우리 식이 있을 때 거기에 일정한
수를 더하거나 빼도 되죠.

01:04:41.441 --> 01:04:44.860
그리고 a가 1보다
크다는 게 있었어요.

01:04:44.960 --> 01:04:48.874
그렇기 때문에 9a에
9를 뺄 거예요.

01:04:48.974 --> 01:04:51.118
그러면 내 마음대로 빼도 되나요?

01:04:51.218 --> 01:04:55.076
원래 이거의 최솟값을 구하는
것이 문제였잖아요.

01:04:55.176 --> 01:04:58.349

2개가 같아지려면 다시
9를 더해주면 되겠죠.

01:04:58.449 --> 01:05:04.995
그런데 이거를 9로 묶어내서
적는다면 식이 이렇게 정리가 돼요.

01:05:05.095 --> 01:05:11.330
그러면 이거는 곱이 일정하면서
둘 다 양수라고 해줄 수가 있습니다.

01:05:11.430 --> 01:05:14.611
a-1이 양수예요.

01:05:14.711 --> 01:05:18.067
그러면서 이렇게 둘을 더해놨어요.

01:05:18.167 --> 01:05:21.127
그러면 얘는 뭐보다 크거나 같죠?

01:05:21.227 --> 01:05:26.109
2√ 둘을 곱해준 것보다
크거나 같은 거죠.

01:05:26.209 --> 01:05:31.610
그래서 9(a-1)*1/a-1+9

01:05:31.710 --> 01:05:33.291
이렇게 식이 성립하죠.

01:05:33.391 --> 01:05:36.834
9는 그냥 상수니까 얘끼리
성립하는 부등식에

01:05:36.934 --> 01:05:41.663
상수 붙인다고 해서 부등식 어긋나지
않아서 계속 가지고 갈 수 있고요.

01:05:41.763 --> 01:05:45.918
그러면 이거 계산한 결과,
2√9가 나오게 되고.

01:05:46.018 --> 01:05:50.383
2*3은 6에 9를 더하니까
15가 된다고 해서

01:05:50.483 --> 01:05:52.997
최솟값은 15로 찾을 수 있습니다.

01:05:53.097 --> 01:05:57.743
문제 여기까지 풀면 되는데, 제가
자꾸만 이런 거를 하고 있어요.

01:05:57.843 --> 01:06:00.547
등호가 언제 성립하는지
보자고 하는 것.

01:06:00.647 --> 01:06:03.499
습관적으로 하는 것이 좋아요.

01:06:03.599 --> 01:06:06.083

그래야 나중에 복잡한
문제가 나왔을 때

01:06:06.183 --> 01:06:09.340
내가 푼 것이 어떻게 하다보면

01:06:09.440 --> 01:06:12.156
산술기하로 풀린 것처럼
보이는 문제들이 있거든요.

01:06:12.256 --> 01:06:16.067
그런데 정말로 그렇게 풀린
것인가를 확인해보려면

01:06:16.167 --> 01:06:18.618
이렇게 등호가 성립하는 a의 값이

01:06:18.718 --> 01:06:21.295
명확하게 존재하느냐를
확인해보면 돼요.

01:06:21.395 --> 01:06:26.095
지금 얘가 같은 부분이 2√a가
2√9로 나오게 됐거든요.

01:06:26.195 --> 01:06:30.748
그래서 2개를 더한 값이 6이
되는데 둘이 서로 같아요.

01:06:30.848 --> 01:06:34.454
그렇다는 것은 9(a-1)=3이
된다는 거죠.

01:06:34.554 --> 01:06:38.056
a-1의 값이 3분의
1이 된다는 것이고

01:06:38.156 --> 01:06:42.889
a는 3분의 4일 때
대입해보면 6이 나오고

01:06:42.989 --> 01:06:47.320
등호가 잘 성립한다는 것을
확인할 수가 있습니다.

01:06:47.420 --> 01:06:50.384
이제 직육면체 모양의
나무토막이 있어요.

01:06:50.484 --> 01:06:54.718
그림 누가 그렸는지 정말 나무토막처럼
잘 그렸죠, 기출문제인데.

01:06:54.818 --> 01:06:59.360
이렇게 나무토막 x, y,
3 나오는 토막이 있는데.

01:06:59.460 --> 01:07:03.391
여기 한 모퉁이에서 길이가
1인 정육면체를 뜯어냈어요.

01:07:03.491 --> 01:07:07.590
예쁘게 잘라냈더니 나무토막
A와 B로 나누어졌죠.

01:07:07.690 --> 01:07:09.808
여기서 원래 x, y, 3이었죠.

01:07:09.908 --> 01:07:14.010
여기가 x, y, 3이었던
상황에서 이렇게 뜯어냈습니다.

01:07:14.110 --> 01:07:17.746
그랬더니 a의 부피가
47이 되었어요.

01:07:17.846 --> 01:07:23.210
그때 이 a의 겉넓이의
최솟값을 구하라고 했네요.

01:07:23.310 --> 01:07:25.938
a의 부피는 어떻게 나오나요?

01:07:26.038 --> 01:07:34.374
원래 부피 구할 때 밑면의 넓이
곱하기 높이 해주면 되죠?

01:07:34.474 --> 01:07:36.925
원래 부피가 3xy였어요.

01:07:37.025 --> 01:07:39.059
그런데 거기서 뭐를 뜯어냈어요?

01:07:39.159 --> 01:07:42.691
이렇게 1, 1, 1인 거를
뜯어냈으니까 부피가 줄어들었죠.

01:07:42.791 --> 01:07:45.247
-1 해준 게 부피가 되거든요.

01:07:45.347 --> 01:07:47.144
그게 47이라는 거예요.

01:07:47.244 --> 01:07:50.094
그러면 3xy가 48로 나오게 되고

01:07:50.194 --> 01:07:52.489
xy가 16인 상황이네요.

01:07:52.589 --> 01:07:55.757
xy의 곱이 일정한
상황이 되었습니다.

01:07:55.857 --> 01:07:58.859
그리고 xy는 길이를
의미하는 것이기 때문에

01:07:58.959 --> 01:08:01.627
모두 양수일 수밖에 없어요.

01:08:01.727 --> 01:08:06.260
이제 그러면 A의 겉넓이의

최솟값을 구하자고 했는데

01:08:06.360 --> 01:08:09.787
겉넓이를 표현해본다면, 보세요.

01:08:09.887 --> 01:08:12.128
여기서 이 부분 내가 뜯어냈지만

01:08:12.228 --> 01:08:15.143
이거를 평행이동해주면 여기로
붙여줄 수가 있죠.

01:08:15.243 --> 01:08:17.760
이 부분에 해당하는 것을
위로 붙여줄 수가 있죠.

01:08:17.860 --> 01:08:20.294
여기 겉에 있는 거를 앞으로
붙여줄 수가 있죠.

01:08:20.394 --> 01:08:24.815
원래 잘라내기 전의 겉넓이하고
잘라낸 후의 겉넓이하고 어떨까요?

01:08:24.915 --> 01:08:26.755
서로 같을 수밖에 없습니다.

01:08:26.855 --> 01:08:29.033
이 면이 그대로 앞으로
왔다고 생각하고

01:08:29.133 --> 01:08:31.750
이 옆에 있는 면이
그대로 여기로 왔다,

01:08:31.850 --> 01:08:35.255
이 밑에 있는 면이 위로 왔다고
생각한다면 원래 그냥 겉넓이,

01:08:35.355 --> 01:08:38.863
잘라낸 거 관계없이 쭉쭉
밀어내서 생각해보면

01:08:38.963 --> 01:08:41.545
잘라내기 전의 겉넓이랑 똑같아요.

01:08:41.645 --> 01:08:45.220
그러면 그 겉넓이는
면이 6개가 있고

01:08:45.320 --> 01:08:52.130
2개씩 면이 합동이니까
전개도를 생각해서

01:08:52.230 --> 01:08:56.634
직육면체 겉넓이 구하듯이
생각해보면 되겠죠.

01:08:56.734 --> 01:08:59.593
x, y, 3이었어요.

01:08:59.693 --> 01:09:04.859
그러면 여기 겉넓이, 밑면의
넓이가 xy짜리가 2개가 있죠.

01:09:04.959 --> 01:09:08.416
그다음에 여기 앞에는
넓이가 3x예요.

01:09:08.516 --> 01:09:11.930
이게 3이고 여기가 x니까
그게 앞에 뒤에 2개가 있죠.

01:09:12.030 --> 01:09:13.602
그래서 +6x.

01:09:13.702 --> 01:09:17.855
거기에 이 y에 3 곱해준
이 옆면의 넓이가

01:09:17.955 --> 01:09:20.949
또 이쪽, 이쪽 해서
2개가 있습니다.

01:09:21.049 --> 01:09:23.564
그러면 또 6y를 더해주면 되는데.

01:09:23.664 --> 01:09:26.902
xy가 16이기 때문에
이거는 32에

01:09:27.002 --> 01:09:31.537
6(x+y)를 한 것과
같은데 최솟값을 구하래요.

01:09:31.637 --> 01:09:35.959
그러면 결국 x+y에 따라서
최솟값이 달라지게 되겠죠.

01:09:36.059 --> 01:09:37.924
그런데 x+y의 최솟값.

01:09:38.024 --> 01:09:39.695
이제 아주 쉽게 구할
수 있지 않겠어요?

01:09:39.795 --> 01:09:44.500
합은 2√xy보다
크거나 같다는 거죠.

01:09:44.600 --> 01:09:48.450
그런데 √2xy가 16이
되니까 8이 됩니다.

01:09:48.550 --> 01:09:52.960
그래서 이거는
32+6*8 해준 것보다

01:09:53.060 --> 01:09:54.893
크거나 같아지게 돼요.

01:09:54.993 --> 01:09:57.972

32에 48을 더해주면
80이 나오게 되죠.

01:09:58.072 --> 01:10:01.462
그래서 겉넓이의 최솟값은
80으로 계산이 되고요.

01:10:01.562 --> 01:10:03.941
그때 x, y는 각각
4로 나오면 되겠죠.

01:10:04.041 --> 01:10:08.018
곱이 16인데 둘의 값이
서로 같아지게 되었으니까요.

01:10:08.118 --> 01:10:13.097
제가 개념 확인 문제를 보통
학평 문제에서 가지고 오잖아요.

01:10:13.197 --> 01:10:19.578
대부분 이 단원에서 나온 문제가
사실 다 산술기하평균,

01:10:19.678 --> 01:10:22.219
부등식을 활용하는 문제가
많이 나오게 되고요.

01:10:22.319 --> 01:10:27.119
앞에 부등식을 증명하는
일반적인 방법이라든지

01:10:27.219 --> 01:10:30.564
그다음에 증명에 대해서
나왔던 기류법,

01:10:30.664 --> 01:10:33.965
그리고 삼단논법,
대우를 이용한 증명.

01:10:34.065 --> 01:10:39.356
이거는 그거 자체가 직접적으로
문제가 출제된다고 생각하기보다는

01:10:39.456 --> 01:10:45.276
여러 수학적으로 만나는 상황속에서
사용이 되는 기본적인 방법.

01:10:45.376 --> 01:10:48.260
곱셈을 어떻게 하느냐를
배웠던 것처럼

01:10:48.360 --> 01:10:51.228
그런 기본적인 방법이라고
생각하면 돼요.

01:10:51.328 --> 01:10:55.333
그래서 그거는 앞으로 옳은
것을 골라라, 라는 문제라든지

01:10:55.433 --> 01:10:58.961
그런 것에 숨어서 많이

나오게 될 거고요.

01:10:59.061 --> 01:11:01.763
여기서 직접적으로 활용이
많이 되는 거는

01:11:01.863 --> 01:11:06.267
증명 쪽에 붙어있었는데 이
산술기하 부등식에 관한 것을

01:11:06.367 --> 01:11:08.581
잊지 않고 잘 활용해주시고.

01:11:08.681 --> 01:11:11.714
이 부분이 나중에 2학년,
3학년이 됐을 때도

01:11:11.814 --> 01:11:15.181
많은 학생들이 어려워하는
부분이기도 해요.

01:11:15.281 --> 01:11:18.303
왜 최솟값으로 구할
수가 있는 것인가.

01:11:18.403 --> 01:11:21.554
이것에 대한 의문을 많이
가지고는 하거든요.

01:11:21.654 --> 01:11:24.715
등호가 성립하기 때문에
가능하다는 거.

01:11:24.815 --> 01:11:28.389
그래서 등호가 성립할 때
x, y 값 구하는 것을

01:11:28.489 --> 01:11:29.891
계속 같이 연습을 했어요.

01:11:29.991 --> 01:11:33.254
크거나 같은데 그 같은
순간이 존재한다는 것이고.

01:11:33.354 --> 01:11:36.796
그러면 그 경곗값이
바로 최솟값이 된다.

01:11:36.896 --> 01:11:39.169
또는 곱의 입장에서는
최댓값이 된다는 것을

01:11:39.269 --> 01:11:43.800
잘 이해를 해주면 응용해서 문제를
잘 풀 수가 있을 거예요.

01:11:43.900 --> 01:11:46.296
그리고 보통 이렇게 길이, 넓이.

01:11:46.396 --> 01:11:49.608
이런 상황이 응용되는 문제로

많이 나오게 됩니다.

01:11:49.708 --> 01:11:55.411
그러면 이제 다음 강에서는 새로운 단원인
함수로 넘어가보도록 하겠습니다.