

WEBVTT

00:00:10.600 --> 00:00:13.405

안녕하세요?

수포자를 위한 수학 기초특강.

00:00:13.505 --> 00:00:14.645

저는 김미주입니다.

00:00:14.745 --> 00:00:16.222

19강입니다.

00:00:16.322 --> 00:00:19.487

우리 지난 강까지 무엇을 배웠는지
잠깐만 또 생각해본다면,

00:00:19.587 --> 00:00:23.074

도형의 방정식에 들어와서
점을 다루었고.

00:00:23.174 --> 00:00:27.659

점과 점을 연결해서 선분,
그 선분의 내분점과 외분점.

00:00:27.759 --> 00:00:30.222

그리고 점과 점 사이의 거리
구하는 것을 했습니다.

00:00:30.322 --> 00:00:32.338

그리고 직선의 방정식을 다루었고요.

00:00:32.438 --> 00:00:34.682

직선의 방정식을 기하적으로 봤을 때

00:00:34.782 --> 00:00:37.816

기울기와 y 절편, 이런
관점에서 보기도 하고.

00:00:37.916 --> 00:00:41.141

그다음에 기울기와 y 절편,
이렇게 나오는 거는

00:00:41.241 --> 00:00:43.553

1차함수처럼 생각을 할
수가 있는 거였는데

00:00:43.653 --> 00:00:46.613

기울기가 없는 직선, 기울기가
0인 직선, 그런 것들.

00:00:46.713 --> 00:00:49.451

일반적인 도형의 관점에서
직선을 살펴보았죠.

00:00:49.551 --> 00:00:52.161

그리고 직선과 직선의
위치 관계를 보면서

00:00:52.261 --> 00:00:55.872

일반적인 방정식의 해와도 직선을

연결해서 생각을 했고.

00:00:55.972 --> 00:00:58.007
원의 방정식도 다루었습니다.

00:00:58.107 --> 00:01:01.256
그래서 원의 정의로부터
방정식을 끌어내고

00:01:01.356 --> 00:01:04.410
그리고 원과 직선 사이의
관계까지 살펴보면서

00:01:04.510 --> 00:01:06.248
원의 접선을 구한다든지.

00:01:06.348 --> 00:01:09.673
그리고 원과 직선 사이의
최단거리, 최장거리를 구하고.

00:01:09.773 --> 00:01:12.516
원과 직선이 두 점에서 만날
때 현의 길이를 구한다.

00:01:12.616 --> 00:01:14.331
이런 것도 같이 살펴보았죠?

00:01:14.431 --> 00:01:16.710
이런 과정 속에서 기하적 특성,

00:01:16.810 --> 00:01:19.918
중학교 때 배웠던 도형의
성질이 사용이 되기도 하고.

00:01:20.018 --> 00:01:22.699
그다음에 대수적인 특성,

00:01:22.799 --> 00:01:26.438
방정식에서 배웠던 그런 내용을
사용을 하기도 했습니다.

00:01:26.538 --> 00:01:31.756
이제 이런 과정 속에서 하나의
예를 들어서 생각해 보자면,

00:01:31.856 --> 00:01:35.025
두 직선의 위치 관계를 할 때

00:01:35.125 --> 00:01:38.821
두 직선이 수직일 조건을 증명하던
과정, 혹시 생각하세요?

00:01:38.921 --> 00:01:41.096
그때 두 직선의 식이 있으면

00:01:41.196 --> 00:01:45.873
그거를 일반적인 상황에서
기울기의 곱이 -1이 될 때

00:01:45.973 --> 00:01:47.146
이게 수직이 된다.

00:01:47.246 --> 00:01:49.817

그리고 수직일 때 기울기

-1이 된다는 것을

00:01:49.917 --> 00:01:52.864

그냥 일반적인 직선의

식을 놓고 구하기가

00:01:52.964 --> 00:01:55.090

계산이 좀 복잡하다 보니까,

00:01:55.190 --> 00:01:59.238

그것을 원점을 지나는

직선으로 평행이동을 해서

00:01:59.338 --> 00:02:02.989

두 직선이 기울기 사이의 어떤

관계가 있으면 될 것인가.

00:02:03.089 --> 00:02:04.806

이것을 살펴봤었어요.

00:02:04.906 --> 00:02:07.376

어차피 그 두 직선이

이루는 각이라는 것은

00:02:07.476 --> 00:02:09.524

기울기에 의해서 결정이

될 테니까요.

00:02:09.624 --> 00:02:12.756

그러면 그런 식으로

직선을 이동시켰죠?

00:02:12.856 --> 00:02:16.173

그렇게 이동시켜서 보니까

계산이 좀 간단해지거나

00:02:16.273 --> 00:02:19.594

그리고 이동을 했을 때 지나는

점의 위치는 변할지라도

00:02:19.694 --> 00:02:22.200

기울기는 변하지 않는다는

특성이 있었는데요.

00:02:22.300 --> 00:02:24.547

그렇게 이동을 시켜서 보았을 때

00:02:24.647 --> 00:02:27.613

그래프를 그리기가 좀 쉬워지거나

식이 간단해지는 경우가 있어서

00:02:27.713 --> 00:02:31.950

이번 19강에서는 도형의 이동을

중점적으로 살펴보게 됩니다.

00:02:32.050 --> 00:02:34.319

그리고 이 이동을 하고 나면

00:02:34.419 --> 00:02:38.135
정말 여러 가지 복잡한 그래프를
그리는 게 좀 간단해지기도 해요.

00:02:38.235 --> 00:02:42.347
평행이동도 그렇고 대칭이동이라는
거를 또 배우게 될 텐데.

00:02:42.447 --> 00:02:44.996
대칭, x 축에 대칭을 시킨다.

00:02:45.096 --> 00:02:46.438
 y 축에 대칭을 시킨다.

00:02:46.538 --> 00:02:48.166
 $y=x$ 에 대해서 대칭을 시킨다.

00:02:48.266 --> 00:02:51.155
그런 거를 이용해서 도형의
성질을 활용하거나

00:02:51.255 --> 00:02:55.302
식을 간단히 만들어서 그래프를 좀
더 쉽게 그릴 수가 있게 됩니다.

00:02:55.402 --> 00:02:58.337
그래서 우리가 20강에서는
한 단계 업해서

00:02:58.437 --> 00:03:00.616
절댓값 기호를 포함한 식의 그래프를

00:03:00.716 --> 00:03:03.414
이동을 통해서 좀 쉽게
구하는 거를 연습해보고

00:03:03.514 --> 00:03:05.647
도형의 방정식을
마무리를 지을 거예요.

00:03:05.747 --> 00:03:09.101
그러면 도형의 이동, 본격적으로
시작해보도록 하겠습니다.

00:03:09.201 --> 00:03:12.930
도형의 이동은 크게
평행이동과 대칭이동,

00:03:13.030 --> 00:03:14.918
이렇게 두 가지를 할 거예요.

00:03:15.018 --> 00:03:17.336
그래서 먼저 평행이동을 할 텐데,

00:03:17.436 --> 00:03:21.030
좌표평면에서 점을 먼저
평행이동 해볼 거고.

00:03:21.130 --> 00:03:25.574
그거를 일반화시켜서 일정한 관계를
유지하던 도형의 방정식들이

00:03:25.674 --> 00:03:29.536

평행이동 후에는 어떠한
방정식을 만족하게 되는가.

00:03:29.636 --> 00:03:31.705

그것을 또 살펴보도록 하겠습니다.

00:03:31.805 --> 00:03:34.677

그래서 먼저 점의
평행이동부터 볼게요.

00:03:34.777 --> 00:03:40.573

예를 들어서 좌표평면 위의 한 점
 $A(2, 3)$ 이라는 좌표를 가지고 있는

00:03:40.673 --> 00:03:42.694

한 점 A 가 있습니다.

00:03:42.794 --> 00:03:45.145

그러면 여기에 이렇게 찍혀있는데,

00:03:45.245 --> 00:03:50.986

이것을 평행이동할 때 어디에 대해서
평행하게 움직이는가를 보니까

00:03:51.086 --> 00:03:53.444

x 축의 방향으로 1만큼,

00:03:53.544 --> 00:03:57.860

x 축의 방향으로 x 축에 평행하게
이동을 하라는 거예요.

00:03:57.960 --> 00:04:01.148

x 축에 평행하니까 y 의
좌표는 변하지 않겠죠.

00:04:01.248 --> 00:04:03.939

그냥 오른쪽으로 1만큼
가는 상황이고요.

00:04:04.039 --> 00:04:10.933

y 축의 방향으로 y 축에 평행하게
-2만큼 이라고 하는 것은

00:04:11.033 --> 00:04:14.090

마이너스라는 것은 y 축의 입장에서는
아래쪽을 의미하죠.

00:04:14.190 --> 00:04:17.689

그래서 아래쪽으로 이만큼
내려간다고 생각하면 되겠죠.

00:04:17.789 --> 00:04:21.069

그러면 애는 결과적으로
오른쪽에서 1만큼 이동하고

00:04:21.169 --> 00:04:23.435

아래쪽으로 2만큼
이동을 했기 때문에

00:04:23.535 --> 00:04:26.496

원래 2, 3이라는
좌표를 가지고 있다면

00:04:26.596 --> 00:04:30.439

x좌표는 1 늘어나고 y좌표는
2가 줄어들게 됩니다.

00:04:30.539 --> 00:04:39.761

그러면서 이동한 점의 좌표를 생각해본다면
3, 1로 가게 될 거예요.

00:04:39.861 --> 00:04:42.370

x는 1만큼 늘어났죠?

00:04:42.470 --> 00:04:46.485

y는 평행이동한 만큼, 2만큼
줄어들게 되었습니다.

00:04:46.585 --> 00:04:48.911

그래서 A의 좌표가
어디로 갈 것이냐?

00:04:49.011 --> 00:04:52.111

바로 3, 1로 간다는
것을 쉽게 알 수가 있죠.

00:04:52.211 --> 00:04:54.163

평행이동의 뜻이 그거예요.

00:04:54.263 --> 00:04:56.448

x축의 방향으로 오라고 한다면

00:04:56.548 --> 00:04:58.712

이렇게 x축에 평행하게
가는 것이니까

00:04:58.812 --> 00:05:01.854

y의 좌표는 이 상태에서는
일단 그대로가 되고.

00:05:01.954 --> 00:05:03.806

그다음에 x 값만
1만 늘어나게 되고.

00:05:03.906 --> 00:05:07.620

이때는 그러면 이동, 여기까지
왔을 때 3, 3이 되는 것인데

00:05:07.720 --> 00:05:10.937

거기에서 다시 y축에 평행하게
내려오게 되는 거니까

00:05:11.037 --> 00:05:13.473

3, 1로 갔다고
생각해주면 됩니다.

00:05:13.573 --> 00:05:16.747

그래서 이런 평행이동이라는
것은 무엇이나면,

00:05:16.847 --> 00:05:18.817

한 도형을 일정한 방향,

00:05:18.917 --> 00:05:24.116

일정한 방향이라고 할 때 이 도형의
방정식에서 다루게 되는 것은

00:05:24.216 --> 00:05:26.980

x 축 또는 y 축의
방향을 의미합니다.

00:05:27.080 --> 00:05:30.323

일정한 거리만큼 옮기는
것을 평행이동이라고 해요.

00:05:30.423 --> 00:05:33.338

그러면 평행이동을 했을
때 달라지는 거.

00:05:33.438 --> 00:05:35.146

어떤 게 달라지게 될까요?

00:05:35.246 --> 00:05:38.090

뭔가 그 점의 위치가
달라지게 되겠죠.

00:05:38.190 --> 00:05:42.947

그리고 좌표평면 위의 한 점을
 x 축의 방향으로 a 만큼,

00:05:43.047 --> 00:05:47.312

y 축의 방향으로 b 만큼
평행이동한 점을 P'

00:05:47.412 --> 00:05:51.999

그리고 좌표를 새롭게 x' , y' 으로
설정을 해왔다고 한다면

00:05:52.099 --> 00:05:55.011

새롭게 이동된 점의 좌표
어떻게 쓸 수 있겠어요?

00:05:55.111 --> 00:05:56.910

조금 전에 봤던 거에 의하면

00:05:57.010 --> 00:06:00.166

x 축으로 그냥 a 만큼
좌표만큼 더해지는 거고

00:06:00.266 --> 00:06:03.278

y 쪽으로 b 만큼 더해지게 되겠죠.

00:06:03.378 --> 00:06:07.478

그래서 P' 에 해당하는
것은 x 에 a 를 더한 만큼

00:06:07.578 --> 00:06:10.243

y 에 b 를 더한 만큼
이동하게 되고.

00:06:10.343 --> 00:06:12.681

이것이 새로운 x 좌표,

00:06:12.781 --> 00:06:16.481

이것이 새로운 y 좌표가 된다고
생각을 해줄 수가 있어요.

00:06:16.581 --> 00:06:20.367

원래 여기에 있었던 것이
 a 만큼, b 만큼 더해서

00:06:20.467 --> 00:06:22.117

여기로 오게 된다는 거죠.

00:06:22.217 --> 00:06:26.479

만약에 a , b 가 음수였다면
왼쪽으로 갈 거고.

00:06:26.579 --> 00:06:28.847

b 가 음수였으면 아래쪽으로
이동하게 되고.

00:06:28.947 --> 00:06:32.374

그렇게 좌표에 이동한 만큼
더해주기만 하면 됩니다.

00:06:32.474 --> 00:06:33.604

어렵지 않죠?

00:06:33.704 --> 00:06:36.141

그래서 연습을 한번 해보면,

00:06:36.241 --> 00:06:40.581

이 점을 어떻게 평행이동했을 때
3, 8이 되겠는가?

00:06:40.681 --> 00:06:42.508

0, 0이라는 점이 있어요.

00:06:42.608 --> 00:06:46.450

원점은 어떻게 이동해야지만
3, 8로 오게 되죠?

00:06:46.550 --> 00:06:54.274

예를 들어 컴퓨터에서
화살표 키가 있잖아요?

00:06:54.374 --> 00:06:57.434

그러면 화살표가 키가 이렇게
이렇게 4개가 있는데,

00:06:57.534 --> 00:07:02.107

이중에 어떤 것을 몇 번 누르느냐고
생각를 해봐도 좋아요.

00:07:02.207 --> 00:07:04.770

왔다갔다 이렇게 하지
않고 최단으로.

00:07:04.870 --> 00:07:08.465

조금만 눌러서 제일
최소 횟수로 눌러서

00:07:08.565 --> 00:07:11.136

어떻게 이동시킬
것이냐를 생각해보면,

00:07:11.236 --> 00:07:13.529

이거 3번, 이거 8번이 되겠죠.

00:07:13.629 --> 00:07:17.993

여기 오른쪽으로 3만큼, 그다음에
위쪽으로 8만큼 왔을 때

00:07:18.093 --> 00:07:20.999

이 점을 여기로 이동시켜줄
수 있습니다.

00:07:21.099 --> 00:07:24.046

그렇기 때문에 어떻게
평행이동하면 되는 거죠?

00:07:24.146 --> 00:07:26.104

x축의 방향으로 3만큼

00:07:26.204 --> 00:07:29.190

y축의 방향으로 8만큼
이동을 시켜주면 되겠죠.

00:07:29.290 --> 00:07:32.271

이번에는
-1, 8이라는 것이 있어요.

00:07:32.371 --> 00:07:35.570

-1, 8 여기 이렇게 있는 것을

00:07:35.670 --> 00:07:39.106

여기에 이동시키고 싶다고 한다면,

00:07:39.206 --> 00:07:44.743

y축의 방향은 생각했을 때 그대로
y좌표가 유지가 되는 것이니까

00:07:44.843 --> 00:07:46.369

이동을 시키지 않을 거예요.

00:07:46.469 --> 00:07:49.238

오로지 이 화살표
키를 누른다고 할 때

00:07:49.338 --> 00:07:52.493

오른쪽으로 4번 가도록
눌러주게 되겠죠.

00:07:52.593 --> 00:07:59.357

그래서 x축의 방향으로 4만큼
평행이동시켰다고 생각해줄 수가 있습니다.

00:07:59.457 --> 00:08:04.477

이렇게 평행이동시킬 때,
평행이동이라는 것을

00:08:04.577 --> 00:08:07.720

이런 f 라는 기호를
이용해서 쓸 수도 있어요.

00:08:07.820 --> 00:08:10.497
 f 라는 평행이동은 어떤 이동이냐?

00:08:10.597 --> 00:08:17.418
 x, y 라는 점을 $x+a, y+b$ 로
이동시키도록 하는 평행이동이다.

00:08:17.518 --> 00:08:20.957
이런 기호로 쓴다면 애가
의미하는 거 자체가

00:08:21.057 --> 00:08:25.720
 x 축의 방향으로 a 만큼,
 y 축의 방향으로 b 만큼

00:08:25.820 --> 00:08:31.124
이렇게 평행이동시키는 것이라고
알아보면 되겠습니다.

00:08:31.224 --> 00:08:36.476
그래서 예를 들어서
평행이동 f 가 x, y 를

00:08:36.576 --> 00:08:41.714
 $x+1, y-2$ 로
이동시킨다고 했을 때

00:08:41.814 --> 00:08:46.144
그러면 3, 2라는 점은
어디로 이동하게 될까요?

00:08:46.244 --> 00:08:49.113
 x 축의 방향으로 1만큼
가게 되는 것이니까 4

00:08:49.213 --> 00:08:52.574
 y 축의 방향으로 -2만큼
가니까 0으로 간다.

00:08:52.674 --> 00:08:54.142
이렇게 이동되는 것이다.

00:08:54.242 --> 00:08:57.289
이런 표현을 알아두는
것도 괜찮습니다.

00:08:57.389 --> 00:09:00.571
문제에 따라서 이렇게 정의를
해서 주기도 하거든요.

00:09:00.671 --> 00:09:03.802
그러면 이제 제가 이
표현을 봤는데,

00:09:03.902 --> 00:09:07.323
이 표현은 f 에 :
이라고 쓴 거예요.

00:09:07.423 --> 00:09:10.170

이 평행이동에 대한
이름을 준 거예요.

00:09:10.270 --> 00:09:12.999

f라는 평행이동은 어떻게 되느냐?

00:09:13.099 --> 00:09:16.849

x, y를 $x+a$, $y+b$ 로 보낸다.

00:09:16.949 --> 00:09:24.308

그래서 이런 이동에 의해서 3, 2는
이 f에 의해 4, 0으로 간다.

00:09:24.408 --> 00:09:27.382

이런 형식으로 이해를
해주면 되는데,

00:09:27.482 --> 00:09:32.656

앞으로 여러분이 도형의 방정식을 볼
때 어떤 표현이 나오게 될 거냐면,

00:09:32.756 --> 00:09:38.189

$f(x, y)=0$ 이라는
표현을 마주하게 됩니다.

00:09:38.289 --> 00:09:40.847

이거랑 이거는 분명히
다르게 생겼어요.

00:09:40.947 --> 00:09:42.053

얘는 f:

00:09:42.153 --> 00:09:44.899

이 이동의 이름이 f라는 거고요.

00:09:44.999 --> 00:09:48.597

이거는 f라는 것에
어떤 식이 있는데,

00:09:48.697 --> 00:09:54.385

거기에 들어가는 문자가 x랑 y가
2개 있다고 생각해주면 돼요.

00:09:54.485 --> 00:09:59.189

익숙하게 봤었던 것은
 $y=f(x)$ 라는 거 봤었죠?

00:09:59.289 --> 00:10:03.167

이런 표현은 x에
뭐가 들어감에 따라서

00:10:03.267 --> 00:10:06.874

y의 값이 하나 나오도록
하는 것이라는 뜻이었잖아요.

00:10:06.974 --> 00:10:11.410

이거는 x랑 y를 넣을
때 0이 나오도록 하는

00:10:11.510 --> 00:10:16.298

그런 x, y 를 모아놓은
것이라는 뜻을 가지고 있습니다.

00:10:16.398 --> 00:10:20.607

예를 들어 이렇게 표현되던
것은 어떤 게 있냐면,

00:10:20.707 --> 00:10:26.317

$y=x^2+1$, 이런 관계식을
가지도록 하는 x, y 가 있다면

00:10:26.417 --> 00:10:28.839

$f(x)$ 를 어떻게 쓸 수가 있어요?

00:10:28.939 --> 00:10:32.535

이 $f(x)$ 는 x 라는 것이
이 f 에 들어갔을 때

00:10:32.635 --> 00:10:37.426

x 를 제공하고 거기에 1을 더해주는
거라고 이야기해줄 수 있죠.

00:10:37.526 --> 00:10:41.590

그래서 이것을 이런 그림으로
그러서 표현을 하기도 했었어요.

00:10:41.690 --> 00:10:46.705

f 라는 식은 만약에 1을
넣으면 이 1 들어간 것,

00:10:46.805 --> 00:10:49.980

여기에 어떤 것이 들어오게
되면 그거를 제공하고

00:10:50.080 --> 00:10:52.402

1을 더해서 그 결과를 내보낸다.

00:10:52.502 --> 00:10:56.423

그러니까 1이 들어오면
1의 제곱 더하기 1을 해서 1이 나오게 되고.

00:10:56.523 --> 00:10:59.953

만약에 별이라는 것이
들어왔다 그러면

00:11:00.053 --> 00:11:04.553

이 별을 제공해서 더하기 1을 해준
그런 결과가 나오도록 하는

00:11:04.653 --> 00:11:06.362

그런 f 인 거죠.

00:11:06.462 --> 00:11:08.790

이런 f 는 뒤에서 보면 알겠지만

00:11:08.890 --> 00:11:10.962

이렇게 $y=f(x)$

00:11:11.062 --> 00:11:13.897

x 가 하나 들어갈 때 y 가
하나씩 나오도록 하는

00:11:13.997 --> 00:11:15.862
이런 관계식 갖는 것을

00:11:15.962 --> 00:11:20.185
 y 가 $f(x)$ 에 대한 함수라고
표현을 해주게 됩니다.

00:11:20.285 --> 00:11:24.352
그런데 $f(x, y)=0$

00:11:24.452 --> 00:11:28.416
이것은 x, y 사이의 관계식 만족하는
그런 것들을 나타내주는 거예요.

00:11:28.516 --> 00:11:32.525
예를 들어서 우리가 봤었던
원의 방정식이 대표적으로

00:11:32.625 --> 00:11:34.628
이런 식으로 표현되는 애거든요.

00:11:34.728 --> 00:11:38.023
 $x^2+y^2-3=0$ 이라는
게 있다고 해볼게요.

00:11:38.123 --> 00:11:44.020
그렇다면 애는 f 라는 기계에
투입구가 하나가 있는 것이 아니라

00:11:44.120 --> 00:11:45.718
2개가 있는 거예요.

00:11:45.818 --> 00:11:49.500
2개가 있어서 여기에 x 라는
값이 들어가게 되고요.

00:11:49.600 --> 00:11:52.326
여기에 y 의 값이
들어가게 되는 거죠.

00:11:52.426 --> 00:11:56.699
 x, y 를 넣어서 여기 들어온
것을 어떻게 해주죠?

00:11:56.799 --> 00:12:00.515
여기에 들어온 것을
받아서 제곱을 해줘요.

00:12:00.615 --> 00:12:03.613
여기로 들어온 것을
받아서 제곱을 해줘요.

00:12:03.713 --> 00:12:07.660
그다음에 둘을 더한 다음에
어떻게 해주느냐?

00:12:07.760 --> 00:12:11.926
 -3 을 해서 0 이 나오는가를
확인하는 거예요.

00:12:12.026 --> 00:12:17.930
그러면 0이 나왔다고 한다면 여기의
결과가 성공이다, 0이 나왔다.

00:12:18.030 --> 00:12:23.676
그래서 이 x, y 는 이 도형 위에
있을 수 있다고 판단을 해주는 기계예요.

00:12:23.776 --> 00:12:25.714
약간 이상하죠? 애량은 다르죠?

00:12:25.814 --> 00:12:29.448
이거는 넣은 값을 그냥
내보내주는 기계였어요.

00:12:29.548 --> 00:12:32.457
그런데 이것은 서로 다른
2개가 들어갔을 때,

00:12:32.557 --> 00:12:33.462
뭐 같을 수도 있죠.

00:12:33.562 --> 00:12:34.977
 x, y 이렇게 들어갔을 때

00:12:35.077 --> 00:12:37.427
여기에서 어떤 각각에
대한 연산을 해주고

00:12:37.527 --> 00:12:40.427
-3이라는 거를 해서
0이 나왔다고 한다면

00:12:40.527 --> 00:12:43.389
성공, 무엇이 성공이나?

00:12:43.489 --> 00:12:48.364
 x, y 는 도형, 애를
도형이라고 부르는데

00:12:48.464 --> 00:12:54.490
 $f(x, y)=0$ 위에 있다고
이렇게 말을 해주게 됩니다.

00:12:54.590 --> 00:12:58.435
 $x^2+y^2-3=0$ 이라는
이 원의 방정식.

00:12:58.535 --> 00:13:00.577
애가 원의 방정식
표준적으로 쓸 때는

00:13:00.677 --> 00:13:03.800
 $x^2+y^2=3$ 이라고 썼었지만

00:13:03.900 --> 00:13:07.542
보다 일반화해서 모든
도형을 표현해주기 위해서

00:13:07.642 --> 00:13:09.307
우변을 그냥 0, 이렇게 썼어요.

00:13:09.407 --> 00:13:11.871
그래서 이렇게 0으로 나타냈을 때

00:13:11.971 --> 00:13:15.344
이거 위에 있다고 이야기를
해줄 수가 있게 되는 거예요.

00:13:15.444 --> 00:13:19.736
예를 들어서 여기에 무엇을 넣었을
때 0이 나오게 될까요?

00:13:19.836 --> 00:13:23.954
x에 1 넣고 y에 $\sqrt{2}$ 넣었을 때

00:13:24.054 --> 00:13:28.551
1을 제공하고 $\sqrt{2}$ 제공한 것에
-3을 해주면 성공으로 나오게 되죠.

00:13:28.651 --> 00:13:34.725
그렇다면 1, $\sqrt{2}$ 라는 것은 이 도형
위에 있다고 판단을 해줄 수가 있어요.

00:13:34.825 --> 00:13:40.224
어떤 x 1에 대해서 y를
- $\sqrt{2}$ 를 넣었다고 한다면

00:13:40.324 --> 00:13:45.483
1의 제공과 - $\sqrt{2}$ 를 제공한 것의
-3을 해준 것도 0이 나오죠.

00:13:45.583 --> 00:13:47.482
그러면 역시 또 성공이 되거든요.

00:13:47.582 --> 00:13:51.668
1, - $\sqrt{2}$ 도 이 도형 위에
있다고 할 수가 있어요.

00:13:51.768 --> 00:13:55.207
그러면 이 기계의 차이점
혹시 알겠어요?

00:13:55.307 --> 00:13:58.917
이거는 x를 하나 넣으면
y 값이 하나가 나왔어요.

00:13:59.017 --> 00:14:01.809
1을 넣으면 2가
나올 수밖에 없어요.

00:14:01.909 --> 00:14:06.809
그래서 1, 2가
 $y=f(x)$ 위에 있는 거고요.

00:14:06.909 --> 00:14:11.152
이거 같은 경우는 x가 1일 때
y가 $\sqrt{2}$ 일 수도 있어요.

00:14:11.252 --> 00:14:15.105
x가 1일 때 y가
- $\sqrt{2}$ 일 수도 있습니다.

00:14:15.205 --> 00:14:17.567

x 하나에 대해서 y의 값이

00:14:17.667 --> 00:14:20.873

2개, 3개 이렇게도 나오게
될 수가 있는 식이에요.

00:14:20.973 --> 00:14:24.409

그래서 $y=f(x)$ 라고 쓰는 것은

00:14:24.509 --> 00:14:31.058

x 하나에 대해서 y가 하나씩
대응이 되는 것이고.

00:14:31.158 --> 00:14:36.555

이거는 그냥 일반적인 x 하나당, y
하나가 나오는 그런 관계가 아니라

00:14:36.655 --> 00:14:39.722

x, y의 일반적 관계식을

00:14:39.822 --> 00:14:43.188

애네 둘이 이런 관계만 그냥
만족하면 돼, 라고 하는

00:14:43.288 --> 00:14:44.830

관계식을 나타내줘요.

00:14:44.930 --> 00:14:48.227

우리가 이런 새로운
기호를 도입하는 이유는

00:14:48.327 --> 00:14:51.115

여태까지 다루었던 직선이나,

00:14:51.215 --> 00:14:55.837

직선 중에서 x축에
수직인 직선을 제외한.

00:14:55.937 --> 00:14:59.924

1차함수나 상수함수,
x축에 평행하도록 나오는

00:15:00.024 --> 00:15:03.409

그런 함수를 나타내는 것은
이런 기호로 가능하지만,

00:15:03.509 --> 00:15:05.941

이런 기호로 표현 불가능한 것들.

00:15:06.041 --> 00:15:09.049

예를 들어서 $x=a$ 라는
형태 나오는 것.

00:15:09.149 --> 00:15:11.694

그리고 원의 방정식의
형태로 나오게 되는 것.

00:15:11.794 --> 00:15:14.631

애네들은 이 형태로

표현이 불가능합니다.

00:15:14.731 --> 00:15:17.979

지금 애는 $y=$ 뭐라고
쓸 수가 없죠?

00:15:18.079 --> 00:15:20.716

y 라는 것이 아예 식에
존재하지 않으니까요.

00:15:20.816 --> 00:15:25.790

그러면 $x=a$ 라는 것은
 $f(x, y)=0$

00:15:25.890 --> 00:15:27.763

이런 형태로 쓰려고 했을 때

00:15:27.863 --> 00:15:31.413

$x-a=0$ 이라고 이렇게
나타내줄 수가 있거든요.

00:15:31.513 --> 00:15:33.462

y 에는 대입할 수 있는 것,

00:15:33.562 --> 00:15:36.084

그냥 아무거나 대입을 할
이유가 없는 거고.

00:15:36.184 --> 00:15:40.411

무조건 x 는 a 가 된다고
써줄 수 있는 식이어서

00:15:40.511 --> 00:15:43.149

$f(x, y)$ 는 그냥 $x-a$ 다.

00:15:43.249 --> 00:15:44.684

y 에는 아무거나 넣어도 된다.

00:15:44.784 --> 00:15:46.238

모든 실수 값 다 가질 수 있다.

00:15:46.338 --> 00:15:47.545

그런 식이 되는 거고요.

00:15:47.645 --> 00:15:50.363

그다음에 이 원의
방정식 같은 경우도

00:15:50.463 --> 00:15:52.971

x^2+y^2 이 방금 봤었던 3.

00:15:53.071 --> 00:15:56.171

이런 거가 $y=$ 이렇게
쓰려고 한다면

00:15:56.271 --> 00:15:58.651

$y^2=3-x^2$ 이니까

00:15:58.751 --> 00:16:01.329

$y=\pm\sqrt{3-x^2}$

00:16:01.429 --> 00:16:03.409
이렇게 2개가 나와버리는 거예요.

00:16:03.509 --> 00:16:05.373
하나로 결정이 안 되기 때문에

00:16:05.473 --> 00:16:08.934
 $y=f(x)$ 라는 식으로 쓸
수가 없는 것이죠.

00:16:09.034 --> 00:16:14.125
그래서 이렇게 $f(x, y)=0$ 이라는
식으로 나타내주게 됩니다.

00:16:14.225 --> 00:16:18.130
그래서 $x^2+y^2-3=0$ 으로 쓴다면

00:16:18.230 --> 00:16:21.213
이것이 바로 이 원의 방정식에서

00:16:21.313 --> 00:16:25.289
 x, y 의 관계를 나타내는 이런
식의 형태가 되는 거예요.

00:16:25.389 --> 00:16:27.478
사실은 되게 어려운 이야기예요.

00:16:27.578 --> 00:16:29.872
이 새로운 기호를
이해를 한다는 것이.

00:16:29.972 --> 00:16:34.220
그래도 애가 교육 과정에서
새로운 학습 요소로 들어가있어요.

00:16:34.320 --> 00:16:37.603
여러분이 꼭 알고 넘어가야
되는 기호라는 거거든요.

00:16:37.703 --> 00:16:40.148
그렇기 때문에 잘 이해를 하세요.

00:16:40.248 --> 00:16:42.686
애하고 차이점을 보면
좀 아실 거예요.

00:16:42.786 --> 00:16:46.555
 $y=f(x)$, 이거는 x 하나당 y 가
하나씩 나오게 되는 형태라고 한다면

00:16:46.655 --> 00:16:50.777
 x, y 의 일반적 관계식을
나타내는 것이 $f(x, y)=0$ 입니다.

00:16:50.877 --> 00:16:54.668
그렇기 때문에 $y=f(x)$ 로
표현이 되던 이런 것도

00:16:54.768 --> 00:16:56.856
이렇게 나타내줄 수도 있어요.

00:16:56.956 --> 00:16:58.379

어떻게 쓰면 될까요?

00:16:58.479 --> 00:17:00.314

$y=x^2+1$ 이라는 것을

00:17:00.414 --> 00:17:04.862

$x^2-y+1=0$ 이라고

바꿔서 쓸 수도 있죠.

00:17:04.962 --> 00:17:09.033

그렇다면 이때는

$f(x, y)$ 에 해당하는 것이

00:17:09.133 --> 00:17:12.228

바로 x^2-y+1 , 이거인 거예요.

00:17:12.328 --> 00:17:16.193

그래서 애에 대해서 새로운

기계를 만들어준다면

00:17:16.293 --> 00:17:17.915

어떻게 만들 수가 있겠어요?

00:17:18.015 --> 00:17:22.063

여기서 x 들어가고

y 들어가고 이렇게 나왔을 때

00:17:22.163 --> 00:17:24.117

여기 들어온 애는 제공해주죠?

00:17:24.217 --> 00:17:26.261

여기 들어온 애는 -를 붙여주죠.

00:17:26.361 --> 00:17:29.559

그다음에 여기에 $+1$ 을

해서 0이 나오는가?

00:17:29.659 --> 00:17:33.503

이거를 확인해서 그렇다고 한다면,

00:17:33.603 --> 00:17:39.827

이제 그 점이 이 도형 위에 있다고 판단을

해줄 수 있는 그런 기계가 됩니다.

00:17:39.927 --> 00:17:42.877

그래서 $f(x, y)=0$ 이라고 하는 거.

00:17:42.977 --> 00:17:44.316

다시 정리를 해보면,

00:17:44.416 --> 00:17:48.293

어떤 원의 방정식

$x^2+y^2=9$ 를 생각했을 때

00:17:48.393 --> 00:17:50.866

$x^2+y^2-9=0$

00:17:50.966 --> 00:17:53.038

이런 식으로 나타내줄

수 있는 것처럼

00:17:53.138 --> 00:17:59.153
어떤 도형에 F 라는 이름을 붙여서
그거의 관계식을 보려고 할 때

00:17:59.253 --> 00:18:01.360
그거를 나타내는 방정식의 모든 항을

00:18:01.460 --> 00:18:04.541
등호의 왼쪽에 오도록
정리를 했다고 한다면

00:18:04.641 --> 00:18:06.319
지금 제가 그림으로 보여드렸던

00:18:06.419 --> 00:18:09.728
이 $f(x, y)=0$ 과 같은
형태로 나타내줄 수가 있다.

00:18:09.828 --> 00:18:13.850
그래서 이 형태에서는
 $f(x, y)$ 에 해당하는 것이

00:18:13.950 --> 00:18:16.975
이렇게 나오는 식으로
표현이 된다는 것이죠.

00:18:17.075 --> 00:18:20.099
 x, y 에 대한 일반적
관계를 나타내줄 수 있고.

00:18:20.199 --> 00:18:23.400
이때는 x 하나에 y 2개가
대응될 수도 있고.

00:18:23.500 --> 00:18:25.864
그다음에 y 하나에 x 2개가
대응될 수도 있고.

00:18:25.964 --> 00:18:28.178
그런 식으로 나오게 되는 거예요.

00:18:28.278 --> 00:18:32.683
그래서 이거는 함수라고
부르지 않고요.

00:18:32.783 --> 00:18:36.811
어떤 도형의 방정식이다,
일반적인 관계식을 나타내는

00:18:36.911 --> 00:18:39.600
도형 F 의 방정식이라고 부르고.

00:18:39.700 --> 00:18:44.001
이 도형 F 를 도형
 $f(x, y)=0$ 이라고

00:18:44.101 --> 00:18:46.459
앞으로 이렇게 표시해서
부르겠다는 거죠.

00:18:46.559 --> 00:18:49.487

아까 제가 그래서 보여드렸던
그 기계입니다.

00:18:49.587 --> 00:18:51.550

x를 넣고 y를 넣어요.

00:18:51.650 --> 00:18:53.576

투입구가 2개가 있어요.

00:18:53.676 --> 00:18:57.446

그러면 여기에서 뭔가 x에
대한 연산, y에 대한 연산

00:18:57.546 --> 00:19:00.456

애네를 가지고 뭔가 계산을
해주는 연산을 해서

00:19:00.556 --> 00:19:03.366

0이 나오는가를 살펴본다는 거죠.

00:19:03.466 --> 00:19:05.503

그래서 0이 나왔다고 한다면

00:19:05.603 --> 00:19:09.268

이 x, y는 도형 F 위에 있다고
이야기를 해줄 수가 있고.

00:19:09.368 --> 00:19:11.295

0이 안 나왔어요.

00:19:11.395 --> 00:19:14.824

그렇다면 이 x, y는 이
도형 위에 있지 않다고

00:19:14.924 --> 00:19:16.286

이야기를 하게 되는 거예요.

00:19:16.386 --> 00:19:19.947

그래서 그런 일반적인 x,
y의 관계를 나타내는

00:19:20.047 --> 00:19:26.176

그런 관계식을 이렇게 $f(x, y)=0$ 이라고
표현해줄 수가 있습니다.

00:19:26.276 --> 00:19:28.951

그래서 예를 들어서,
우리 같이 했었던 거.

00:19:29.051 --> 00:19:36.781

x^2+y-9 라고 식이
표현되었다고 한다면

00:19:36.881 --> 00:19:41.189

애네가 과연 이 도형 위에
있을지 판단을 해보세요.

00:19:41.289 --> 00:19:43.199

어떻게 판단하면 되죠?

00:19:43.299 --> 00:19:45.936
x에 1 넣고 y에 2 넣었을 때

00:19:46.036 --> 00:19:49.345
1은 제공해주고 2
제공하고 둘을 더한 다음에

00:19:49.445 --> 00:19:50.997
-9를 해보는 거죠.

00:19:51.097 --> 00:19:54.608
그러면 $1+4-9$,
이거는 0인가요?

00:19:54.708 --> 00:20:02.527
0이 아니니까 1, 2는 이 도형 F
위에 있지 않다고 나오게 되고요.

00:20:02.627 --> 00:20:05.817
이거 같은 경우는
2를 넣어서 제공하고

00:20:05.917 --> 00:20:07.697
3을 넣어서 제공해보고
-9를 했을 때.

00:20:07.797 --> 00:20:10.095
2 제공하면 4죠?

00:20:10.195 --> 00:20:13.212
 $\sqrt{3}$ 제공해주면 3이 나오게 되죠.

00:20:13.312 --> 00:20:15.384
거기에 -9를 했다.

00:20:15.484 --> 00:20:18.745
그러면 이것도 역시
0이 나오지가 않네요.

00:20:18.845 --> 00:20:21.547
제가 이런 거를 의도해서 가지고
오지는 않았을 것 같은데.

00:20:21.647 --> 00:20:22.961
이거를 5로 바꿔볼까요?

00:20:23.061 --> 00:20:27.192
그러면 $\sqrt{5}$ 에 제공해주면
9가 나오니까

00:20:27.292 --> 00:20:30.249
이때는 이 값이 0이
나온다고 해줄 수가 있죠.

00:20:30.349 --> 00:20:34.865
그러면 2, $\sqrt{5}$ 는 F 위에 있다고

00:20:34.965 --> 00:20:37.968
이렇게 나타내줄 수가 있는 것이죠.

00:20:38.068 --> 00:20:42.330

그래서 이렇게 이 도형 위에
있는 애들을 다 모았을 때

00:20:42.430 --> 00:20:45.058

지금 $2, \sqrt{5}$ 는 여기
위에 있다는 거잖아요.

00:20:45.158 --> 00:20:46.595

또 있는 애들이 있을 거고.

00:20:46.695 --> 00:20:50.119

개네를 모았을 때
이런 반지름이 3이고

00:20:50.219 --> 00:20:54.766

중심이 0, 0이 되는 원점인

00:20:54.866 --> 00:21:00.303

원의 방정식을 나타내주는 도형
F가 그려지게 될 것이다.

00:21:00.403 --> 00:21:03.214

이것을 나타내주는 식입니다.

00:21:03.314 --> 00:21:07.089

이렇게 $f(x, y)$ 를 제가
장황하게 설명을 했어요.

00:21:07.189 --> 00:21:09.259

연습을 한번해볼까요?

00:21:09.359 --> 00:21:12.167

우리 일반적으로 다루던 직선이에요.

00:21:12.267 --> 00:21:16.537

이 직선은 y 는 5분의
 $2x+5$ 분의 9라고 해서

00:21:16.637 --> 00:21:23.808

$f(x)=2x/5+9/5$,
이것도 가능해요.

00:21:23.908 --> 00:21:26.457

하지만 보다 일반적으로 봤을 때,

00:21:26.557 --> 00:21:31.744

$f(x, y)$ 라고 써서 이거는 x
들어가면 거기에 2배를 해주고

00:21:31.844 --> 00:21:35.266

y 가 들어가면 $-5y$ 를
해주고 $+9$ 를 했을 때

00:21:35.366 --> 00:21:37.623

그게 0이 나오도록 한다면

00:21:37.723 --> 00:21:41.303

그렇다면 이런 x, y 는
이 도형 위에 있다.

00:21:41.403 --> 00:21:44.493

이런 표현 방식을 쓸
수도 있다는 거죠.

00:21:44.593 --> 00:21:48.072
그래서 여기서 $f(x, y)$ 에
해당하는 식이

00:21:48.172 --> 00:21:51.102
바로 이 $2x-5y+9$ 가 되겠죠.

00:21:51.202 --> 00:21:53.799
이거 같은 경우는 뭐가 될까요?

00:21:53.899 --> 00:21:57.539
 x, y 에 해당하는 식을 적는다면

00:21:57.639 --> 00:22:02.964
왼쪽에 모든 식 넣어놓고 우변의 값이
0이 되도록 하는 식인 거예요.

00:22:03.064 --> 00:22:07.521
그래서 $f(x, y)$,
애 같은 경우는 기계를 그렸을 때

00:22:07.621 --> 00:22:13.018
여기 들어간 것에 애를 받아서
2 더한 다음에 제공해주고.

00:22:13.118 --> 00:22:16.662
그다음에 여기서 받은 것을
-1한 다음에 제공해주고.

00:22:16.762 --> 00:22:20.975
또 3을 빼서 이것이
0이냐는 거를 살펴봐서

00:22:21.075 --> 00:22:23.050
0이 되면 이 도형 위에 있다.

00:22:23.150 --> 00:22:26.211
0이 아니라면 이 도형
위에 있지 않다고 표현하는

00:22:26.311 --> 00:22:27.628
그런 식이 됩니다.

00:22:27.728 --> 00:22:30.952
그래서 여기서 $f(x, y)$ 에
해당하는 이게 나오게 되고.

00:22:31.052 --> 00:22:35.055
이것은 0이라고 해주면,
그 도형의 방정식.

00:22:35.155 --> 00:22:38.517
이 도형 위에 있는 애들만
모으게 되는 것이죠.

00:22:38.617 --> 00:22:41.107
그러면 애는 어떻게
표현할 수 있을까요?

00:22:41.207 --> 00:22:43.569

$f(x, y)$ 에
해당하는 것을 찾는다면

00:22:43.669 --> 00:22:46.212

x^2+2x-y 가 되겠죠.

00:22:46.312 --> 00:22:48.837

이게 $f(x, y)$ 에
해당하는 거고.

00:22:48.937 --> 00:22:53.705

이거는 0이라고 쓰면 그 도형 위에
있는 애들을 나타내주게 되고요.

00:22:53.805 --> 00:22:57.572

애는 x^2+4x+y^2-21

00:22:57.672 --> 00:23:01.359

이거를 f 라는 이름으로
붙여주게 된다고 한다면,

00:23:01.459 --> 00:23:06.439

그 식, 기계에 넣었을 때
계산할 식은 바로 이 식이고,

00:23:06.539 --> 00:23:09.175

그래서 이것이 0이라고 한다면

00:23:09.275 --> 00:23:13.584

바로 이 도형 위에 있는 모든 점들을
나타낼 수 있는 식인 거예요.

00:23:13.684 --> 00:23:17.326

이거를 왜 이렇게 열심히
설명을 했느냐?

00:23:17.426 --> 00:23:21.618

도형을 이제 평행이동한다고
생각해보겠습니다.

00:23:21.718 --> 00:23:25.003

조금 전에 봤었던 거는 점을
평행이동하는 거였어요.

00:23:25.103 --> 00:23:33.419

어떤 점 같은 경우는
 $P(x, y)$ 가 있다는 것을

00:23:33.519 --> 00:23:37.527

오른쪽으로, 그러니까
 x 축의 방향으로 3만큼

00:23:37.627 --> 00:23:42.873

y 축의 방향으로 -2만큼
평행이동한다고 했을 때

00:23:42.973 --> 00:23:46.243

$P'(x+3, y-2)$

00:23:46.343 --> 00:23:47.782

그냥 이렇게 쓸 수가 있었어요.

00:23:47.882 --> 00:23:51.130

이런 식으로 점을
이동시켜줄 수가 있는데.

00:23:51.230 --> 00:23:55.354

만약에 이게 어떤
원 위의 점이었던 거예요.

00:23:55.454 --> 00:24:03.339

그러면 이 도형 자체는 다 같이
오른쪽으로 3만큼 아래쪽으로 2만큼.

00:24:03.439 --> 00:24:07.131

x축의 방향으로 3만큼,
y축의 방향으로 -2만큼

00:24:07.231 --> 00:24:12.385

평행이동하면서 그대로 또 같이
평행이동이 돼서 내려오게 되겠죠.

00:24:12.485 --> 00:24:14.531

여기 점의 상대적인 위치,

00:24:14.631 --> 00:24:17.306

이 원에서의 상대적인 위치는
비슷해야 될 거예요.

00:24:17.406 --> 00:24:20.959

제가 약간 이 아래쪽,
왼쪽에 있도록 그렸으니까

00:24:21.059 --> 00:24:23.924

여기서도 이런 식으로
모양이 나오면서

00:24:24.024 --> 00:24:27.482

도형이 평행이동이 된다고 한다면,

00:24:27.582 --> 00:24:33.075

그대로 이 식이 내려오게 되면서
도형의 모양이 그대로 유지가 되고

00:24:33.175 --> 00:24:36.383

위치만 달라지는 형태로
나타내지게 됩니다.

00:24:36.483 --> 00:24:40.410

그러면 좀 더 구체적인 예를
들어서 설명을 해볼까요?

00:24:40.510 --> 00:24:42.774

제가 그림을 좀
마구잡이로 그렸으니까

00:24:42.874 --> 00:24:48.791

예를 들어 어떤 점이
 $x^2+y^2=9$ 라는

00:24:48.891 --> 00:24:51.853

아까 계속 다루던 그 식을
한번 생각을 해볼까요?

00:24:51.953 --> 00:25:00.839

여기에 이렇게 있었던 점 하나가
 $\sqrt{2}$, 1이라고 생각해볼게요.

00:25:00.939 --> 00:25:06.343

$\sqrt{2}$, 1이라는 점이
있었던 거예요.

00:25:06.443 --> 00:25:07.589

죄송합니다.

00:25:07.689 --> 00:25:12.463

$\sqrt{2}$, 1은 제공해서 더하면 9가 나오는
것이 아니라 3이 나오게 되죠.

00:25:12.563 --> 00:25:16.075

여기 2가 들어가고 $\sqrt{5}$ 가
들어가 있었다고 해볼게요.

00:25:16.175 --> 00:25:19.261

2, $\sqrt{5}$ 라는 것이 있었다고 한다면

00:25:19.361 --> 00:25:23.384

2의 제곱 + $\sqrt{5}$ 의 제곱
계산해서 9가 나오게 되니까

00:25:23.484 --> 00:25:25.723

이거는 이 원 위의
점이라고 할 수가 있죠.

00:25:25.823 --> 00:25:29.023

그런데 애네를 일정하게
오른쪽으로 3만큼,

00:25:29.123 --> 00:25:31.925

아래쪽으로 2만큼
이동을 시킨 거예요.

00:25:32.025 --> 00:25:35.241

그러면 이 새로운 점은
어떻게 나오게 되죠?

00:25:35.341 --> 00:25:38.613

5, $\sqrt{5}-2$ 라고 나오게 되죠.

00:25:38.713 --> 00:25:41.380

그렇게 점의 좌표를
구하는 것을 했어요.

00:25:41.480 --> 00:25:44.711

그런데 이 원을 이렇게
이동시켰을 때

00:25:44.811 --> 00:25:47.944

과연 이 원의 방정식은
어떻게 될 것이냐?

00:25:48.044 --> 00:25:51.197

이동된 식이 과연
이 식 위에 있을까요?

00:25:51.297 --> 00:25:53.015

당연히 그렇지 않죠.

00:25:53.115 --> 00:25:55.718

이렇게 이동된 점을
생각을 해볼게요.

00:25:55.818 --> 00:26:01.530

이동된 점은 원래는 2를 제공하고
 $\sqrt{5}$ 를 제공해서 더했을 때

00:26:01.630 --> 00:26:03.023

9가 되는 거였어요.

00:26:03.123 --> 00:26:06.143

그러면 애를 이 식에
넣었을 때 성립하나요?

00:26:06.243 --> 00:26:07.463

계산 한번 해볼까요?

00:26:07.563 --> 00:26:11.457

$5^2 + (\sqrt{5} - 2)^2$, 뭐가 나와요?

00:26:11.557 --> 00:26:17.089

딱 봐도 $25 + 9 - 4\sqrt{5}$,
이렇게 나오게 되니까

00:26:17.189 --> 00:26:19.113

절대로 9가 나오지 않죠.

00:26:19.213 --> 00:26:22.670

아까 쓰던 일반적인 식대로 써본다면

00:26:22.770 --> 00:26:24.961

애 -9는 0이라고 했을 때,

00:26:25.061 --> 00:26:28.671

여기에서 -9 해준 것이
0이 나오느냐고 한다면

00:26:28.771 --> 00:26:30.648

0이 나오지 않는다는 거예요.

00:26:30.748 --> 00:26:36.001

원래 이 도형이 나타내는
그 식을 적어보게 된다면

00:26:36.101 --> 00:26:43.506

이렇게 $f(x, y)$ 라는 기체가
나타내주는 것은 어떤 식이었죠?

00:26:43.606 --> 00:26:46.713

여기에 들어온 거 제공해주고

00:26:46.813 --> 00:26:50.015

여기에 들어온 거를

제공해서 더한 다음에

00:26:50.115 --> 00:26:53.800

여기에서 9를 빼서 0이
나오게 되느냐는 것을

00:26:53.900 --> 00:26:56.643

확인해보는 그런 기계였어요.

00:26:56.743 --> 00:26:59.872

그래서 2하고 $\sqrt{5}$ 를 대입했을 때는

00:26:59.972 --> 00:27:04.048

$2^2 + \sqrt{5^2 - 9}$ 를
해주면 0이 나오니까

00:27:04.148 --> 00:27:08.493

2, $\sqrt{5}$ 는 이 원 위에 있다고
말을 하는 식이었는데.

00:27:08.593 --> 00:27:12.542

여기서 애를 평행이동을 했잖아요?

00:27:12.642 --> 00:27:16.451

평행이동을 해서 내가 넣게
되는 것이 5를 넣고

00:27:16.551 --> 00:27:18.908

$\sqrt{5-2}$ 를 넣겠다는 거예요.

00:27:19.008 --> 00:27:22.714

그러면 거기에 어떤
연산을 해줘야지만

00:27:22.814 --> 00:27:25.518

내가 여기에 0이 나오게 되어서

00:27:25.618 --> 00:27:29.156

5, $\sqrt{5-2}$ 는 새로
이동된 도형 위에 있어.

00:27:29.256 --> 00:27:31.639

이렇게 말을 해주고 싶다고 한다면

00:27:31.739 --> 00:27:34.520

이거랑 관계지어서 생각했을 때

00:27:34.620 --> 00:27:37.625

어떤 식에 대입을 해주어야 될까요?

00:27:37.725 --> 00:27:40.803

이거가 다시 2가 될 수 있다면

00:27:40.903 --> 00:27:46.261

그렇다면 애는 똑같은
계산식을 적용했을 때

00:27:46.361 --> 00:27:49.542

계산을 해서 0이 나오게
될 수가 있겠죠.

00:27:49.642 --> 00:27:51.356
제가 결론을 말씀드릴게요.

00:27:51.456 --> 00:27:54.901
무슨 말이나면 5는 어떻게
해서 만들어지는 거냐면,

00:27:55.001 --> 00:27:56.884
2를 평행이동했잖아요?

00:27:56.984 --> 00:27:59.114
3만큼 평행이동을 했죠.

00:27:59.214 --> 00:28:02.982
그다음에 $\sqrt{5}-2$ 라는 거는
그야말로 $\sqrt{5}$ 에 2만큼을 뺐죠.

00:28:03.082 --> 00:28:07.349
그러면 내가 여기에 애를
받아서 계산을 해줄 때

00:28:07.449 --> 00:28:09.586
어떤 계산을 해주느냐.

00:28:09.686 --> 00:28:14.692
2에 3을 더했으니까 다시
3을 빼서 제공하는 거예요.

00:28:14.792 --> 00:28:17.510
그리고 더하기 -2를 빼놨으니까

00:28:17.610 --> 00:28:21.176
다시 2를 더해서 제공을 한
다음에 빼기 9를 한다.

00:28:21.276 --> 00:28:25.490
그러면 그때 이 값은
0이 나올 수 있을까요?

00:28:25.590 --> 00:28:26.820
0이 나오겠죠.

00:28:26.920 --> 00:28:29.543
왜냐하면 여기 $2+3$ 이 들어갔을 때

00:28:29.643 --> 00:28:31.945
다시 빼기 3을 하게 되면
 2^2 이 되고.

00:28:32.045 --> 00:28:35.271
 $\sqrt{5}-2$ 가 들어갔을 때
다시 2를 더해서 제공하면

00:28:35.371 --> 00:28:36.834
5가 나오게 되는 거잖아요.

00:28:36.934 --> 00:28:40.632
그러면 둘 더한 거에 9를 빼주면
0이 나올 수밖에 없습니다.

00:28:40.732 --> 00:28:45.254

즉 여기 그 식을
계산하는 부분을 봤을 때

00:28:45.354 --> 00:28:49.273
이렇게 여기 조작한 것을 제공해주고

00:28:49.373 --> 00:28:53.039
그다음에 +, 이렇게
계산된 것을 제공했을 때

00:28:53.139 --> 00:28:56.714
2개를 더한 것에서 9를
빼다고 표현이 되는 부분은

00:28:56.814 --> 00:28:59.939
여기서 했던 그 f에
의한 계산과 똑같아요.

00:29:00.039 --> 00:29:04.103
그런데 그 f에 결국 무엇을
대입해준 것과 같냐?

00:29:04.203 --> 00:29:06.435
x, y를 그냥 대입한 것이 아니라

00:29:06.535 --> 00:29:09.646
여기에 들어가게 되는
x에 3을 빼주고

00:29:09.746 --> 00:29:14.462
여기 들어가게 되는 y에
2를 더해서 계산해준 것이

00:29:14.562 --> 00:29:19.959
0이 나오도록 하는 애가 바로
이동된 도형 위에 있다고

00:29:20.059 --> 00:29:21.520
이야기를 해줄 수가 있는 거죠.

00:29:21.620 --> 00:29:23.513
내가 일정하게 점들을,

00:29:23.613 --> 00:29:30.442
지금 $P(x, y)$ 를
 $P'(x', y')$ 으로 바꿔줄 때

00:29:30.542 --> 00:29:33.330
이 x' 이 $x+3$ 이 되고요.

00:29:33.430 --> 00:29:36.660
 y' 이라는 것은 $y-2$ 가 되었어요.

00:29:36.760 --> 00:29:39.983
그러면 이 식을 어디에 넣어야지만,

00:29:40.083 --> 00:29:43.766
그 결과가 0이 예쁘게 나오게
될 것이냐고 생각을 해본다면

00:29:43.866 --> 00:29:47.794

원래 x, y 는 f 에 넣었을 때

00:29:47.894 --> 00:29:51.549

이 $f(x, y)$ 에 넣었을
때 0이 나왔었잖아요?

00:29:51.649 --> 00:29:56.307

그렇기 때문에 이렇게 된 것을
다시 여기에 넣어서 계산해줘서

00:29:56.407 --> 00:29:59.905

0이 나오도록 해주려면
 $x+3$ 에 3을 빼주고

00:30:00.005 --> 00:30:02.565

$y-2$ 에 다시 2를 더해주고.

00:30:02.665 --> 00:30:06.692

그렇게 해서 아까 f 라는 계산에
의해서 계산을 해줘야지만

00:30:06.792 --> 00:30:09.277

0이 나오게 된다는 그런 뜻입니다.

00:30:09.377 --> 00:30:16.551

그래서 이동된 식, 평행이동된
그 도형이 나타내주게 되는

00:30:16.651 --> 00:30:20.083

이동된 도형의 방정식을
구한다고 한다면

00:30:20.183 --> 00:30:22.717

원래 식과 비교해서 적었을 때

00:30:22.817 --> 00:30:28.542

$f(x)-y, y+2=0$ 이라고 식을
표현을 해줄 수가 있는 거예요.

00:30:28.642 --> 00:30:31.786

정말 그런지 여기 식
맥락에서 확인을 해볼까요?

00:30:31.886 --> 00:30:35.064

원래 식이 $x^2+y^2=9$ 였죠.

00:30:35.164 --> 00:30:42.179

그런데 이 식은 사실 우리가 굳이
원래 거랑 비교해보지 않아도

00:30:42.279 --> 00:30:44.304

원이 평행이동했잖아요.

00:30:44.404 --> 00:30:47.687

원이 평행이동, 그냥 오른쪽으로
끌고 밑으로 내리고.

00:30:47.787 --> 00:30:50.988

그렇게 하려고 할 때
원의 반지름이 변하나요?

00:30:51.088 --> 00:30:55.357

변하지 않고 그대로 오른쪽
아래쪽으로 내려오거든요.

00:30:55.457 --> 00:30:56.688

변하지 않아요.

00:30:56.788 --> 00:31:00.490

그렇다면 애가 중심의
위치만 바뀐다.

00:31:00.590 --> 00:31:04.733

반지름은 그대로고 중심의 위치만
바뀐다고 할 수가 있는데.

00:31:04.833 --> 00:31:06.900

원래 중심이 0, 0이었어요.

00:31:07.000 --> 00:31:10.104

이거를 오른쪽으로 3만큼
아래쪽으로 2만큼 내렸어요.

00:31:10.204 --> 00:31:14.156

그러면 중심이 3, -2가
된다고 할 수가 있죠.

00:31:14.256 --> 00:31:17.469

그렇기 때문에 이 이동된
식을 적어본다면

00:31:17.569 --> 00:31:21.608

중심이 3이고 3, -2가 되고

00:31:21.708 --> 00:31:24.748

반지름이 그대로 2가 되는 원이니까

00:31:24.848 --> 00:31:26.997

이렇게 나타내줄 수가 있는 거예요.

00:31:27.097 --> 00:31:30.908

그러면 여기에서
 $f(x, y)$ 에 해당하는 것이

00:31:31.008 --> 00:31:34.664

$x^2 + y^2 - 9 = 0$ 이라는 거였죠.

00:31:34.764 --> 00:31:40.252

여기서는 $f(x, y)$ 를 써본다면
이게 어떻게 된 것이냐?

00:31:40.352 --> 00:31:43.876

이거랑 비교해서 봤을 때
이 식이 나타내는 것은

00:31:43.976 --> 00:31:46.751

여기 x 자리에 $x-3$ 을 넣어주고

00:31:46.851 --> 00:31:50.348

여기 y 자리에 $y+2$ 를 넣어서

00:31:50.448 --> 00:31:53.101

0이 되도록 한 식에 해당하는
게 바로 이거인 거죠.

00:31:53.201 --> 00:31:54.834
x가 들어갔을 때 x^2 하고

00:31:54.934 --> 00:31:57.743
y가 들어갔을 때 y^2 하고
-9해서 0이 되도록 하는

00:31:57.843 --> 00:32:01.691
그런 식이었으니까
 $f(x-3, y+2)=0$ 이라고 쓴다면

00:32:01.791 --> 00:32:06.054
바로 $(x-3)^2$, 그다음에
 $(y+2)^2=9$ 로 나오게 돼요.

00:32:06.154 --> 00:32:08.462
비교해 보니까 어떻게 됐나요?

00:32:08.562 --> 00:32:12.640
x 대신에 x-3, x축의
방향으로 3만큼 이동했더니

00:32:12.740 --> 00:32:15.054
x-3 해준 거를 넣은 거고요.

00:32:15.154 --> 00:32:18.398
y축의 방향으로
-2만큼 평행이동했더니

00:32:18.498 --> 00:32:24.262
y 대신에 y+2를 넣게
되었다는 것이 결론입니다.

00:32:24.362 --> 00:32:26.821
그래서 이게 결론으로 나오게 되는데

00:32:26.921 --> 00:32:29.413
한번 정리를 해서
보여드리도록 할게요.

00:32:29.513 --> 00:32:32.197
지금 제가 여기서 쪽
설명해드린 게 뭐냐면,

00:32:32.297 --> 00:32:35.135
 $f(x, y)=0$ 을
만족하는 P(x, y)들이

00:32:35.235 --> 00:32:37.955
이렇게 일정하게 평행이동되었다.

00:32:38.055 --> 00:32:40.714
당연히 이 F 위에
있지 않다는 거고.

00:32:40.814 --> 00:32:46.298
이동된 식의 방정식을 원래
식을 이용해서 구해보자는

00:32:46.398 --> 00:32:47.940
그런 맥락이었어요.

00:32:48.040 --> 00:32:52.252
그래서 x, y 를 이 연산에 넣었을
때 0이 되도록 하는 거였으니까

00:32:52.352 --> 00:32:54.537
이동된 것을 생각해보자면,

00:32:54.637 --> 00:32:58.268
나의 이동된 x' 은 x 에
일정하게 3을 더해준 거고.

00:32:58.368 --> 00:33:01.387
 y' 은 y 에 2를 빼준 거가 되니까

00:33:01.487 --> 00:33:05.467
이렇게 -3을 해놓고
+2가 나왔던 것을

00:33:05.567 --> 00:33:09.284
다시 원래대로 돌려주려고
생각을 해본다면,

00:33:09.384 --> 00:33:11.983
그러니까 $x+3$ 이고 $y-2$ 였으니까

00:33:12.083 --> 00:33:14.452
원래 연산에 제대로 넣어주게 되려면

00:33:14.552 --> 00:33:16.640
여기에 3를 다시 빼주고

00:33:16.740 --> 00:33:20.933
여기에는 2를 더해서 연산 f 에
넣어야지만 0이 나오게 된다는 거죠.

00:33:21.033 --> 00:33:23.987
그래서 이 f 에 넣을 때
그냥 넣는 것이 아니라

00:33:24.087 --> 00:33:27.071
이렇게 이동된 점에서 -3을 해주고

00:33:27.171 --> 00:33:31.387
이동된 점에서 +2를 해서
넣어야지만 0이 나오겠다.

00:33:31.487 --> 00:33:36.933
그래서 $f(x'-3, y'+2)$ 라고
나타내줄 수가 있는데

00:33:37.033 --> 00:33:39.326
어차피 '은 그렇게
큰 의미가 없어요.

00:33:39.426 --> 00:33:43.099
도형에서 x, y 의 관계식을
나타낸 것이 도형의 방정식이니까

00:33:43.199 --> 00:33:46.842
이거를 떼놓고 써본다면 이런 식으로
나타내줄 수가 있는 거죠.

00:33:46.942 --> 00:33:49.935
이거를 교과서에서 보면 이런
그림을 이용해서 쓰지 않고

00:33:50.035 --> 00:33:52.722
이렇게 설명을 해놨을 거예요.

00:33:52.822 --> 00:33:58.831
이 x, y 라는 게 너무
어려울 수 있을 것 같아요.

00:33:58.931 --> 00:34:01.780
그래서 다들 이 상황을
계속 이해를 못합니다.

00:34:01.880 --> 00:34:04.245
그래서 a, b 라고 표현을...

00:34:04.345 --> 00:34:07.628
죄송해요,
그냥 x, y 라고 하겠습니다.

00:34:07.728 --> 00:34:10.649
 a, b 는 또 뒤에
 x 축으로 a 만큼,

00:34:10.749 --> 00:34:13.470
 y 축으로 b 만큼 그 표현이랑
겹칠 수가 있기 때문에

00:34:13.570 --> 00:34:15.949
 $P(x, y)$ 라는 점이 있다고 해볼게요.

00:34:16.049 --> 00:34:22.323
이거가 $f(x, y)=0$
위의 점일 때

00:34:22.423 --> 00:34:27.771
지금 구하려고 하는 것이
 $P(x+a, y+b)$ 를 해준 것.

00:34:27.871 --> 00:34:31.128
이것은 P' 이라고
나타내줄 수가 있죠.

00:34:31.228 --> 00:34:35.976
이거를 새롭게 이 좌표를
 x', y' 이라고 해서

00:34:36.076 --> 00:34:40.844
이거는 어느 도형 위의
점인가, 라는 거예요.

00:34:40.944 --> 00:34:46.234
그러면 x' 이 $x+a$ 와 같고

00:34:46.334 --> 00:34:49.123

y' 이 $y+a$ 랑 같은데.

00:34:49.223 --> 00:34:52.321

원래 $f(x, y)=0$ 이라는 것은

00:34:52.421 --> 00:34:55.239

x, y 에 대해서

성립하던 식이었죠.

00:34:55.339 --> 00:35:00.683

그렇기 때문에 이거를 x, y 에

대한 식에서 성립하도록 하기 위해서

00:35:00.783 --> 00:35:03.919

$x=x'-a$ 가 되고

00:35:04.019 --> 00:35:08.051

$y=y'-b$ 로 나오게 되잖아요?

00:35:08.151 --> 00:35:13.059

y 축의 방향으로 b 만큼

평행이동했다고 했을 때.

00:35:13.159 --> 00:35:16.173

$y'-b$, 이렇게 나오게 되니까

00:35:16.273 --> 00:35:21.492

이것을 여기에 대입해야지만

식이 성립하게 된다고 해서

00:35:21.592 --> 00:35:25.531

f 에 $x'-a, y'-b$ 는

00:35:25.631 --> 00:35:28.884

0이 된다는 것을

대입해준 이 식이,

00:35:28.984 --> 00:35:31.494

새롭게 이동된 도형의

방정식이 되고.

00:35:31.594 --> 00:35:35.811

x', y' 이라고 쓰는 것은

굳이 필요하지 않으니까

00:35:35.911 --> 00:35:37.682

일반적으로 새로 이동된 식에서

00:35:37.782 --> 00:35:40.515

x, y 에 성립하는

관계식을 구하려고 한다면

00:35:40.615 --> 00:35:45.159

이렇게 $f(x-a, y-b)=0$ 이라고

나타내줄 수가 있는 거예요.

00:35:45.259 --> 00:35:47.266

기호가 너무 많이 나오다 보니까

00:35:47.366 --> 00:35:50.028

여러분이 이거랑 이거랑 또
헛갈려하기도 합니다.

00:35:50.128 --> 00:35:53.403
 $P(x+a, y+b)$ 이거하고

00:35:53.503 --> 00:35:57.807
 $f(x-a, y-b)=0$ 하고

00:35:57.907 --> 00:36:00.414
이거는 완전히 다른 표현이에요.

00:36:00.514 --> 00:36:05.237
여기서 x, y 라는 것은 상수의
좌표를 나타내는 거예요.

00:36:05.337 --> 00:36:09.032
어떤 x, y 라는
좌표가 이동이 될 때

00:36:09.132 --> 00:36:11.250
 a 만큼, b 만큼 이동이 된다면

00:36:11.350 --> 00:36:14.372
그야말로 a 만큼 더해주고
 b 만큼 더해주어서

00:36:14.472 --> 00:36:16.221
이동이 된 상황을 나타내주는 거고.

00:36:16.321 --> 00:36:21.505
여기에 있었던 도형이 만족하는 식이
 $f(x, y)=0$ 이라는 것이었다면

00:36:21.605 --> 00:36:24.187
이렇게 이동된 상황에서
만족하는 식은,

00:36:24.287 --> 00:36:29.523
여기 있었던 x 에 내가 a 를
더해서 $x+a$ 가 돼버렸잖아요.

00:36:29.623 --> 00:36:31.761
그러니까 그 a 를 다시 빼주고

00:36:31.861 --> 00:36:35.392
여기 있던 y 에 b 를 더해서
새로운 y' 이 됐으니까

00:36:35.492 --> 00:36:37.953
그 새로운 y' 에 b 를 뺀 다음에

00:36:38.053 --> 00:36:41.876
이 f 에 대입해줘야지만
0이 나오게 된다는

00:36:41.976 --> 00:36:44.039
그런 결론을 나타내주게 돼요.

00:36:44.139 --> 00:36:48.742
그래서 x 축으로 a 만큼 y 축으로

b만큼 평행이동했을 때

00:36:48.842 --> 00:36:51.970
좌표는 이동한 만큼 더해주면 되지만

00:36:52.070 --> 00:36:54.631
도형의 방정식의 입장에서 보자면

00:36:54.731 --> 00:36:57.727
a만큼, b만큼 평행이동했을
때 애네를 뺀 것을

00:36:57.827 --> 00:37:03.117
f의 식에 대입해야지만 새로운
관계식을 얻을 수가 있다는 것입니다.

00:37:03.217 --> 00:37:07.886
그래서 $f(x, y)=0$ 위의 각
점을 x축의 방향으로 a만큼,

00:37:07.986 --> 00:37:11.281
y축의 방향으로 b만큼
평행이동했을 때

00:37:11.381 --> 00:37:13.482
새로운 방정식이
이게 나오게 된다.

00:37:13.582 --> 00:37:16.918
이 한 줄 설명하려고 제가
굉장히 길게 설명을 드렸어요.

00:37:17.018 --> 00:37:18.302
사실 외우면 쉬워요.

00:37:18.402 --> 00:37:22.262
그냥 도형의 방정식은
x-a 넣고 y-b 넣는다고

00:37:22.362 --> 00:37:25.981
그렇게 점은 더하고 도형은
뺀다고 외워도 되겠지만,

00:37:26.081 --> 00:37:31.715
왜 이렇게 점은 더하고
도형은 뺀는지 이해가 되나요?

00:37:31.815 --> 00:37:37.146
점은 점의 좌표가 그대로
오른쪽, 위쪽으로

00:37:37.246 --> 00:37:39.608
우리 화살표키 누르듯이
올라가는 거예요.

00:37:39.708 --> 00:37:41.754
그런데 이 도형의 관계식이라는 게

00:37:41.854 --> 00:37:45.243
저도 이해하는 데
굉장히 오래걸렸어요.

00:37:45.343 --> 00:37:47.330

이해하기가 쉽지가 않아서
계속 여러분이,

00:37:47.430 --> 00:37:50.250

제가 아까 그림 그렸던
거를 보면 좋겠어요.

00:37:50.350 --> 00:37:56.518

원래 f 라는 기계에는
 x, y 라는 것을 넣어서

00:37:56.618 --> 00:37:59.520

0이 나오도록 하는
애들을 모은 건데

00:37:59.620 --> 00:38:02.322

내가 이거 평행이동을 시키는 바람에

00:38:02.422 --> 00:38:07.521

$x+a, y+b$ 를 이
똑같은 기계에 넣었을 때

00:38:07.621 --> 00:38:09.955

또 0이 나오도록 하고 싶어.

00:38:10.055 --> 00:38:13.169

그러면 내가 이거를 더해봤으니까
그냥 넣으면 안 되잖아요.

00:38:13.269 --> 00:38:15.170

어떻게 넣어야 되죠?

00:38:15.270 --> 00:38:16.935

$-a$ 를 해서 넣고

00:38:17.035 --> 00:38:19.733

그다음에 또 y 에 b 를 더해봤으니까

00:38:19.833 --> 00:38:26.280

$-b$ 를 해서 여기에 넣어주어야
그래야 0이 나오게 된다는 거죠.

00:38:26.380 --> 00:38:30.342

그래서 f 에 원래
 x, y 를 넣어서 0이 나오는

00:38:30.442 --> 00:38:32.490

그런 관계식이었다고 한다면

00:38:32.590 --> 00:38:37.668

애를 평행이동했을 때는 평행이동된
그 점에 a 를 빼주고

00:38:37.768 --> 00:38:43.467

평행이동된 점에 b 를 빼주어서
 f 에 대입을 해줘야지만

00:38:43.567 --> 00:38:47.768

0이 나오게 되는 그런

관계식을 의미한다는 것입니다.

00:38:47.868 --> 00:38:50.577
그림으로 나타내주면 제가
계속 그렸던 그림,

00:38:50.677 --> 00:38:51.890
이렇게 쓸 수가 있고요.

00:38:51.990 --> 00:38:57.623
점 x' , y' 은
 $x+a$, $y+b$ 로 나오게 되지만

00:38:57.723 --> 00:39:01.782
식으로 갔을 때는
 f 에 $x-a$ 를 넣고

00:39:01.882 --> 00:39:06.544
 $y-b$ 를 넣어주어야 0이 나오는
식을 만족한다는 거예요.

00:39:06.644 --> 00:39:09.353
그러면 한번 연습을 해볼까요?

00:39:09.453 --> 00:39:12.314
이 도형을 x 축의
방향으로 -2만큼,

00:39:12.414 --> 00:39:16.522
 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한
도형의 방정식이 어떻게 될 것이냐.

00:39:16.622 --> 00:39:20.781
 x 대신에 무엇을
대입해줘야 된다고요? $x+2$.

00:39:20.881 --> 00:39:24.514
 y 대신에는
 $y-1$ 를 대입해주게 됩니다.

00:39:24.614 --> 00:39:25.752
그래서 이렇게 나와요.

00:39:25.852 --> 00:39:32.060
 $2x-5y$ 에 $4+5+9$ 가
되니까 $18=0$ 나오죠.

00:39:32.160 --> 00:39:34.188
원래 직선과 평행해요.

00:39:34.288 --> 00:39:36.333
평행이동했으니까 당연히 평행하죠.

00:39:36.433 --> 00:39:39.753
그러면서 위치만 달라진
식이 나오게 됩니다.

00:39:39.853 --> 00:39:41.710
얘는 어떻게 되죠?

00:39:41.810 --> 00:39:44.844

x 대신에 $x+2$ 를 넣었죠.

00:39:44.944 --> 00:39:48.069

y 대신에 $y-1$ 을 넣었어요.

00:39:48.169 --> 00:39:49.857

그리고 계산을 해주게 되면

00:39:49.957 --> 00:39:56.065

$(x+4)^2+(y-2)^2=3$ 으로

나오게 되죠.

00:39:56.165 --> 00:40:01.380

원래 원이라는 것은 중심과

반지름으로 움직이는데

00:40:01.480 --> 00:40:06.214

중심은 $-2, 1$ 이고

반지름이 $\sqrt{3}$ 이었어요.

00:40:06.314 --> 00:40:08.504

여기서 중심 얼마가 되었나요?

00:40:08.604 --> 00:40:13.120

$-4, 2$ 고 반지름이

그대로 $\sqrt{3}$ 이죠.

00:40:13.220 --> 00:40:15.511

중심 어떻게 된 거 보이세요?

00:40:15.611 --> 00:40:21.343

원래 $-2, 1$ 이었는데 중심이

$-4, 2$ 로 가도록 하려면

00:40:21.443 --> 00:40:23.847

x축의 방향으로 얼마큼 간 거죠?

00:40:23.947 --> 00:40:25.240

-2 만큼 간 거고.

00:40:25.340 --> 00:40:29.971

y축의 방향으로 1 만큼 간 거,

그렇게 평행이동된 거 맞습니다.

00:40:30.071 --> 00:40:33.032

이렇게 우리가 구하는

그 알고리즘대로 대입해주면

00:40:33.132 --> 00:40:34.939

당연히 성립하게 되는 거고요.

00:40:35.039 --> 00:40:42.385

세 번째 거, $y=x^2+2x$ 라고

식이 주어져 있는데.

00:40:42.485 --> 00:40:48.990

이것도 y 대신에 $y-1$,

x 대신에 $x+2$ 를 넣어서

00:40:49.090 --> 00:40:51.082

정리를 해주면 되는 거예요.

00:40:51.182 --> 00:40:59.168

그래서 식을 전개를
해본다면 $x^2 +$

00:40:59.268 --> 00:41:02.962

여기서 $4x$ 나오고 $2x$ 를
더하니까 $+6x$ 가 되죠?

00:41:03.062 --> 00:41:06.123

그다음에 여기에서 4하고
4를 더하면 8이 되고

00:41:06.223 --> 00:41:09.241

1이 넘어오면서 $+9$ 로
나오게 되죠.

00:41:09.341 --> 00:41:13.036

지금 2차함수식이었어요.

00:41:13.136 --> 00:41:16.036

2차함수는 우리가 그래프를 볼 때

00:41:16.136 --> 00:41:18.511

누구를 기준으로 움직여서
생각을 하나요?

00:41:18.611 --> 00:41:20.394

꼭짓점을 구해보잖아요?

00:41:20.494 --> 00:41:23.207

애는 $(x+1)^2 - 1$ 이었거든요.

00:41:23.307 --> 00:41:26.889

꼭짓점의 좌표가
 $-1, -1$ 이었어요.

00:41:26.989 --> 00:41:32.855

여기서 꼭짓점의 좌표를 구해보니까
 $-3, 0$ 으로 나오게 되죠.

00:41:32.955 --> 00:41:33.815

어때요?

00:41:33.915 --> 00:41:37.449

x 축의 방향으로 꼭짓점의 좌표
이동된 모양을 살펴 보니까

00:41:37.549 --> 00:41:40.211

여기 꼭짓점과 여기
꼭짓점 비교했을 때

00:41:40.311 --> 00:41:42.443

x 축의 방향으로 -2 만큼,

00:41:42.543 --> 00:41:45.832

y 축의 방향으로 1 만큼
평행이동된 거 맞죠.

00:41:45.932 --> 00:41:48.793

그래서 이렇게 식 만들어지게 되고.

00:41:48.893 --> 00:41:51.862

아예 애초에 애를
표준형으로 바꿔놓고

00:41:51.962 --> 00:41:56.090

꼭짓점만 달라지게 된다는 것을
사용해서 식을 전개했다고 한다면,

00:41:56.190 --> 00:41:57.777

좀 더 계산이 쉬웠을 수도 있어요.

00:41:57.877 --> 00:42:00.448

그러면 마찬가지로 맥락에서
네 번째 거 보면,

00:42:00.548 --> 00:42:04.258

$x^2 + 4x + y^2 - 21 = 0$ 인데

00:42:04.358 --> 00:42:07.329

이것도 x 대신에 그냥 $x+2$,

00:42:07.429 --> 00:42:11.297

y 대신에 $y-1$ 를 넣기
전에 표준형 바꿔놓고 넣으면

00:42:11.397 --> 00:42:12.865

좀 더 효율적일 수 있겠죠.

00:42:12.965 --> 00:42:18.760

식이 이렇게 된 중심이
 $-2, 0$ 이고

00:42:18.860 --> 00:42:21.574

반지름이 5가 되는 원이었으니까

00:42:21.674 --> 00:42:25.143

x 대신에 $x+2$
넣는다고 생각해 보면

00:42:25.243 --> 00:42:26.965

$(x+4)^2$ 되고요.

00:42:27.065 --> 00:42:29.657

y 대신에 $y-1$ 을 넣었을
때 이런 식으로 나와요.

00:42:29.757 --> 00:42:33.589

원래 중심이 $-2, 0$ 이었어요.

00:42:33.689 --> 00:42:35.981

여기서는 $-4, 1$ 이 되면서

00:42:36.081 --> 00:42:40.243

x 축의 방향으로 -2 만큼,
 y 축의 방향으로 1 만큼

00:42:40.440 --> 00:42:43.408

평행이동된 거 맞다는 거
확인할 수 있죠.

00:42:43.508 --> 00:42:46.739

각 도형에서 평행이동 후에
변하는 것, 변하지 않는 것

00:42:46.839 --> 00:42:48.057

뭔지 아시겠어요?

00:42:48.157 --> 00:42:51.087

원 같은 경우는 변하는 것.

00:42:51.187 --> 00:42:55.697

중심의 위치가 평행이동해서
바뀌게 되고요.

00:42:55.797 --> 00:42:58.651

변하지 않는 거는 반지름은
그대로 유지가 되죠.

00:42:58.751 --> 00:43:05.510

직선이었다 그러면 직선에서 변하는
것은 예를 들어 한 점.

00:43:05.610 --> 00:43:07.596

보통 기준으로 잡는 것.

00:43:07.696 --> 00:43:10.950

y절편이 있으니까 y절편이
평행이동돼서 바뀌고요.

00:43:11.050 --> 00:43:13.935

아까 우리 여기서는 확인 안
했는데, 한번 각자 해보세요.

00:43:14.035 --> 00:43:16.130

y절편이 바뀌고 변하지 않는 것.

00:43:16.230 --> 00:43:19.833

평행이동이니까 그야말로
기울기는 그대로라는 거예요.

00:43:19.933 --> 00:43:23.355

그다음에 2차함수의 곡선
나타내주는 그런 거를

00:43:23.455 --> 00:43:25.732

우리가 보통 포물선이라고 부릅니다.

00:43:25.832 --> 00:43:27.726

포물선 같은 경우에 변하는 거.

00:43:27.826 --> 00:43:30.656

꼭짓점의 위치가 평행이동이
되는 것이고.

00:43:30.756 --> 00:43:34.468

기준이 되는 그 꼭짓점 위치가
평행이동이 돼서 바뀌게 되고.

00:43:34.568 --> 00:43:38.758

그다음에
 $y=a(x-p)^2+q$ 라는

00:43:38.858 --> 00:43:41.395
이런 형태로 2차함수식을 적었을 때

00:43:41.495 --> 00:43:43.679
여기 a 값에 해당하게 되는,

00:43:43.779 --> 00:43:46.460
2차함수에서의 뚱뚱한
정도를 나타내는,

00:43:46.560 --> 00:43:50.024
마치 기울기처럼 역할을 해주게
되는 그런 2차항의 개수.

00:43:50.124 --> 00:43:52.398
그것은 변하지 않고
유지가 되는 것이죠.

00:43:52.498 --> 00:43:54.434
그래서 꼭짓점만 이동을
시켜보면 되고.

00:43:54.534 --> 00:43:56.637
원의 중심만 이동시켜보면 되고.

00:43:56.737 --> 00:43:59.938
y절편만 이동시켜서 기울기
그대로 유지가 되면서

00:44:00.038 --> 00:44:03.367
도형을 이동시킨다고
생각하셔도 좋습니다.

00:44:03.467 --> 00:44:08.746
그러면 이번에는 대칭이동이라는
것을 한번 해보겠습니다.

00:44:08.846 --> 00:44:10.671
지금까지 한 것은 평행이동이었어요.

00:44:10.771 --> 00:44:14.682
평행이동 정리하자면 좌표는 이동한
만큼 그냥 더해주면 되고.

00:44:14.782 --> 00:44:18.480
도형의 방정식을 구할 때는
이동시킨 것만큼을 빼서

00:44:18.580 --> 00:44:20.783
도형의 식에 넣으면 된다는 거고요.

00:44:20.883 --> 00:44:23.042
이번에는 대칭이동을 한다.

00:44:23.142 --> 00:44:26.575
여기도 마찬가지로 점을
대칭이동시켜보고요.

00:44:26.675 --> 00:44:29.109
그다음에 도형을

대칭이동시켜보겠습니다.

00:44:29.209 --> 00:44:34.528
그런데 대칭을 시킬 때는 대칭의
기준이 되는 것이 2개가 있어요.

00:44:34.628 --> 00:44:36.383
점에 대한 대칭이 있고요.

00:44:36.483 --> 00:44:38.921
그리고 직선에 대한
대칭이 있습니다.

00:44:39.021 --> 00:44:40.603
그렇게 두 가지를 볼게요.

00:44:40.703 --> 00:44:43.527
먼저 점에 대해서 대칭시킨다는
것이 무슨 뜻이냐?

00:44:43.627 --> 00:44:47.751
이 점 P를 점 A에 대해서
대칭시킨다고 생각해 보세요.

00:44:47.851 --> 00:44:50.001
P가 어디로 갈지 그려보시겠어요?

00:44:50.101 --> 00:44:51.467
어디로 갈까요?

00:44:51.567 --> 00:44:54.436
A에 대해서 애를
대칭이동했다는 것은,

00:44:54.536 --> 00:44:57.314
여기쯤으로 이동한다고
생각할 수가 있겠죠.

00:44:57.414 --> 00:44:58.799
2개가 같아지게 됩니다.

00:44:58.899 --> 00:45:03.312
A는 이동된 점으로 이루어지는
선분 PP'을 생각했을 때

00:45:03.412 --> 00:45:07.055
이거의 중점이 되도록,
딱 가운데 위치하도록

00:45:07.155 --> 00:45:10.109
이동을 시켜주는 방법을
생각할 수가 있을 거고.

00:45:10.209 --> 00:45:11.934
이번에 직선에 대한 대칭.

00:45:12.034 --> 00:45:15.660
P는 l에 대해서 대칭이동했다고
생각을 해볼게요.

00:45:15.760 --> 00:45:18.786

I로 이 칠판을 접는다고
생각을 해볼게요.

00:45:18.886 --> 00:45:22.599
P에 물감 찍어놓고 I을
접는 선으로 해서 접었습니다.

00:45:22.699 --> 00:45:25.449
그렇게 되면 애가
이쪽으로 오게 되겠죠.

00:45:25.549 --> 00:45:29.718
접었어요, 접었기 때문에
대칭을 시켰다고 하면,

00:45:29.818 --> 00:45:34.937
여기서 이것과 이것이 길이가
똑같아지게 될 거예요.

00:45:35.037 --> 00:45:37.986
여기 직선으로 나누어지는
부분에 의해서

00:45:38.086 --> 00:45:40.265
길이가 똑같아지게 되고요.

00:45:40.365 --> 00:45:42.132
그다음에 접었잖아요?

00:45:42.232 --> 00:45:46.177
접었기 때문에 만약 우리가
이런 또 하나의 점을 생각해서

00:45:46.277 --> 00:45:47.515
이렇게 연결했을 때

00:45:47.615 --> 00:45:49.805
이거하고 이거하고 길이가
같아지게 될 거고.

00:45:49.905 --> 00:45:54.094
두 삼각형이 합동으로 나오게
되면서 여기가 90도가 됩니다.

00:45:54.194 --> 00:45:55.758
결국 뭐가 되죠?

00:45:55.858 --> 00:46:01.752
I은 이 선분 PP'의 수직이등분선이라고
이야기해줄 수가 있어요.

00:46:01.852 --> 00:46:04.147
그래서 점에 대한 대칭이동은

00:46:04.247 --> 00:46:09.510
대칭점이 이동된 점과
이동시킬 점의 중점이다.

00:46:09.610 --> 00:46:13.113
그리고 직선에 대한 대칭이동은

00:46:13.213 --> 00:46:16.287

이 직선이 이동시키기
전과 후의 점에

00:46:16.387 --> 00:46:19.711

수직이등분선이 된다는
것을 사용해주면

00:46:19.811 --> 00:46:24.078

점이 어떻게 변하는지 또
도형이 어떻게 바뀌는지를

00:46:24.178 --> 00:46:25.815

이해해줄 수가 있습니다.

00:46:25.915 --> 00:46:29.309

그래서 결론을 쪽 적어볼게요.

00:46:29.409 --> 00:46:33.172

어떤 점을 대칭이동하고
도형을 대칭이동했을 때

00:46:33.272 --> 00:46:34.509

식이 어떻게 될 것인가.

00:46:34.609 --> 00:46:37.618

한 번에 정리를 쪽 해서
적어보도록 하겠습니다.

00:46:37.718 --> 00:46:39.405

직관적으로 생각해볼까요?

00:46:39.505 --> 00:46:42.426

x축에 대해서 대칭시킵니다.
어떻게 될까요?

00:46:42.526 --> 00:46:46.756

x좌표 그대로 나오게 되고 y좌표가
- 붙어서 나오게 되겠죠.

00:46:46.856 --> 00:46:48.440

그럼 한번 그려볼게요.

00:46:48.540 --> 00:46:51.069

x축에 대해서 대칭시켰을 때,

00:46:51.169 --> 00:46:53.792

x, y라는 점이 있었어요.

00:46:53.892 --> 00:46:57.682

그렇다고 한다면 x축을
접는 선으로 해서

00:46:57.782 --> 00:46:58.896

이 x축은 직선이에요.

00:46:58.996 --> 00:47:02.772

x축이 이거의 수직이등분선이
되는 거니까 접는선.

00:47:02.803 --> 00:47:04.597

수직으로 내려오게 되기 때문에,

00:47:04.666 --> 00:47:06.618

x좌표는 그대로 유지가 되면서

00:47:06.718 --> 00:47:11.852

여기랑 여기랑 길이가 같아지려면

y좌표만 부호가 반대로 바뀌면 되겠죠.

00:47:11.952 --> 00:47:14.142

그래서 x, -y로 나오게 돼요.

00:47:14.242 --> 00:47:16.388

그러면 도형은 어떻게 바뀔 것이냐?

00:47:16.488 --> 00:47:19.524

우리 f라는 도형이 원래 있었어요.

00:47:19.624 --> 00:47:21.691

f(x, y)라는 도형이 있어서

00:47:21.791 --> 00:47:24.602

이것이 0이 되는 애들을

모아놓은 도형이었어요.

00:47:24.702 --> 00:47:29.138

그런데 애는 x, y를 넣었을 때

0이 나오는 것이었죠.

00:47:29.238 --> 00:47:34.298

그런데 대칭이동을 시켰더니 여기가
y에 -가 붙어버렸어요.

00:47:34.398 --> 00:47:38.787

그러면 여기 x에 들어온 다음에
그냥 애는 그대로 놔두고

00:47:38.887 --> 00:47:43.778

여기 -y로 들어온 애를
어떻게 해서 넣어주어야지만

00:47:43.878 --> 00:47:47.460

원래 식에 대입했을 때 그대로
0이 나오게 될까요?

00:47:47.560 --> 00:47:51.331

여기에 추가로 -를 붙여준 상태에서

00:47:51.431 --> 00:47:54.400

계산을 해주어야지만
0이 나오게 되겠죠.

00:47:54.500 --> 00:47:55.765

무슨 뜻이냐?

00:47:55.865 --> 00:48:01.216

지금 x, y가
x, -y로 이동이 됐잖아요.

00:48:01.316 --> 00:48:04.082

이것이 x', y'이거든요.

00:48:04.182 --> 00:48:08.712
x'이 x랑 같고
y'이 -y랑 같아요.

00:48:08.812 --> 00:48:11.336
그러면 x, y 순서를
바꿔서 적는다면

00:48:11.436 --> 00:48:15.249
 $x=x'$ 이고, $y=-y'$ 이거든요.

00:48:15.349 --> 00:48:20.009
그렇기 때문에 원래 x, y는
0에 대해서 성립하던 식에

00:48:20.109 --> 00:48:22.573
이 x, y 자리에 무엇을 넣느냐?

00:48:22.673 --> 00:48:24.845
x' 그대로 넣어주고

00:48:24.945 --> 00:48:27.131
y는 다시 -를 붙여서.

00:48:27.231 --> 00:48:30.467
-를 붙여봤으니까 다시
또 -를 붙여야지만

00:48:30.567 --> 00:48:34.647
원래 y가 되면서 대입을 했을 때
0이 나오게 될 수가 있겠죠.

00:48:34.747 --> 00:48:37.432
그래서 '을 빼놓고 써본다면

00:48:37.532 --> 00:48:41.103
 $f(x, -y)=0$
이렇게 나오게 됩니다.

00:48:41.203 --> 00:48:46.444
결론을 적는다면
이 도형을 대칭이동해줬다.

00:48:46.544 --> 00:48:48.970
그러면 $f(x, -y)=0$

00:48:49.070 --> 00:48:52.080
y 대신에 -y를
대입해주면 되는 거예요.

00:48:52.180 --> 00:48:54.324
아까 평행이동이랑은 다르네요?

00:48:54.424 --> 00:48:57.895
평행이동에서는 a만큼을
더해줬잖아요, 좌표에서.

00:48:57.995 --> 00:49:00.772
그러면 그 a,
b만큼을 더해봤으니까

00:49:00.872 --> 00:49:04.470
그거를 다시 빼서 도형에 넣어야지만
0이 나오게 되기 때문에

00:49:04.570 --> 00:49:09.264
f에 x, y 를 넣을 때
 $x-a, y-b$ 로 넣은 거예요.

00:49:09.364 --> 00:49:14.103
대칭이동 같은 경우는 $x,$
 y 에 하나에 $-$ 를 붙여줬죠.

00:49:14.203 --> 00:49:17.585
그러면 $-$ 를 없앨 수 있는 방법은
다시 $-$ 를 붙이는 거예요.

00:49:17.685 --> 00:49:19.424
우리 부정의 부정은 긍정이다.

00:49:19.524 --> 00:49:21.845
 $-$, $-$ 는 $+$ 라는 거 있잖아요?

00:49:21.945 --> 00:49:25.112
그렇기 때문에 $x-y$ 를 해봤으니까

00:49:25.212 --> 00:49:28.669
그 $-y$ 에 다시 $-$ 를
붙여서 대입해주면

00:49:28.769 --> 00:49:31.130
원래 식 그대로 만족하게
된다는 차원에서

00:49:31.230 --> 00:49:35.892
똑같아 보입니다, 그렇지만
같은 알고리즘은 아니에요.

00:49:35.992 --> 00:49:40.036
제가 너무 답답한 것이 도형의
이동을 많은 학생들이 외워요.

00:49:40.136 --> 00:49:43.667
그러면서 이런 식으로
그냥 평행이동은 도형,

00:49:43.767 --> 00:49:48.604
점은 그냥 더하면 되고
도형 같은 경우는 빼면 돼.

00:49:48.704 --> 00:49:51.678
대칭이동은 2개가 똑같아,
그래서 기억하기가 쉬워.

00:49:51.778 --> 00:49:55.186
그리고 점과 도형을
구분하지 못하니까

00:49:55.286 --> 00:49:57.746
이 점이랑 도형이랑 막 섞어서,

00:49:57.846 --> 00:50:01.320

여러 번 이동을 시키는 것이
있을 때 그 문제를 못 풀어요.

00:50:01.420 --> 00:50:03.500

도저히 이해를 못하는
상황이 됩니다.

00:50:03.600 --> 00:50:05.066

제가 그렇게 여러 개 섞는 것은

00:50:05.166 --> 00:50:08.883

여기 강좌에서는 아직 이해가
안 되어있을 수 있는데

00:50:08.983 --> 00:50:11.408

너무 어려울 것 같아서
다루지는 않을 거예요.

00:50:11.508 --> 00:50:14.354

그 문제를 보고 싶다면
제가 강의했던 것 중에

00:50:14.454 --> 00:50:16.831

풍산자 수학이 있거든요.

00:50:16.931 --> 00:50:19.563

풍산자 수학 상에
도형의 이동 부분에서

00:50:19.663 --> 00:50:23.820

굉장히 자세하게 다루었으니까
참고로 보면 좋을 것 같습니다.

00:50:23.920 --> 00:50:25.984

이렇게 그대로 나오는데,

00:50:26.084 --> 00:50:29.633

애는 진짜 그야말로
도형이동된 모양을 보니까

00:50:29.733 --> 00:50:31.178

x , $-y$ 가 된다는 거고.

00:50:31.278 --> 00:50:33.997

이렇게 이동시킨 애를 어떤
식에 대입을 해야 되느냐?

00:50:34.097 --> 00:50:36.627

- 붙여봤으니까 다시 -를 붙여야

00:50:36.727 --> 00:50:40.525

원래 식에 대입했을 때 0이 된다는
차원에서 -를 붙인 거예요.

00:50:40.625 --> 00:50:42.335

y 축은 어떨까요?

00:50:42.435 --> 00:50:45.691

똑같이 생각을 해보면 x 에만
-를 붙이게 되겠죠.

00:50:45.791 --> 00:50:49.958
마찬가지로 x 에 $-$ 가 붙어서
 0 이라는 식이 나오게 되고요.

00:50:50.058 --> 00:50:55.725
원점대칭시키면 원점이 x, y 랑
이동된 점의 중점이 돼요.

00:50:55.825 --> 00:50:57.758
이거는 점대칭이잖아요?

00:50:57.858 --> 00:51:02.555
이거하고 이동된 점
 x', y' 이거를 생각했을 때

00:51:02.655 --> 00:51:05.841
 $x'+x$ 나누기 2 가 0 이 되고

00:51:05.941 --> 00:51:08.999
 $y'+y$ 나누기 2 가 0 이 되도록

00:51:09.099 --> 00:51:11.522
중점이 되도록 이동을
시킨다고 생각을 해보면,

00:51:11.622 --> 00:51:14.645
이 x' 이 $-x$ 가 되면 되겠죠.

00:51:14.745 --> 00:51:20.204
 y' 은 $-y$ 가 돼야지만 둘을
더해서 0 이 나오게 되겠죠.

00:51:20.304 --> 00:51:23.574
그렇기 때문에 이렇게 원점에
대해서 대칭시키게 되면

00:51:23.674 --> 00:51:26.124
 $-x, -y$ 가 나오게 되고요.

00:51:26.224 --> 00:51:30.976
그러면 이 이동된, x' 이 $-x$ 인데

00:51:31.076 --> 00:51:36.604
그거를 원래 f 식에 대입해서
식 성립하도록 하려면

00:51:36.704 --> 00:51:39.693
 x' 이 $-x$ 가 된 것,

00:51:39.793 --> 00:51:45.304
여기에 다시 $-$ 를
붙여주어야 x 가 되어서

00:51:45.404 --> 00:51:47.939
원래 식에 대입했을 때
성립하게 되겠죠.

00:51:48.039 --> 00:51:50.107
그래서 $-x$.

00:51:50.207 --> 00:51:54.387

마찬가지로 y 도 y' 이
- y 가 돼버렸으니까

00:51:54.487 --> 00:52:00.189

여기에 -를 붙여주어야지만
원래의 y 가 되면서

00:52:00.289 --> 00:52:03.254

이거는 0이 된다고
나오게 되는 거예요.

00:52:03.354 --> 00:52:06.382

도형의 식이 이렇게 나오게 됩니다.

00:52:06.482 --> 00:52:09.342

점을 이동시키는 방법과
도형을 이동시키는 방법,

00:52:09.442 --> 00:52:10.855

똑같이 이렇게 나오게 되었어요.

00:52:10.955 --> 00:52:14.400

그다음에 $y=x$ 에 대해서
대칭시키는 것을 생각해볼게요.

00:52:14.500 --> 00:52:16.809

여기 그림을 그려서
보도록 하겠습니다.

00:52:16.909 --> 00:52:19.632

$y=x$ 라는 직선이 있어요.

00:52:19.732 --> 00:52:26.573

이 직선에 대해서 x , y 라는
점을 대칭이동시키고 싶습니다.

00:52:26.673 --> 00:52:29.773

그러면 이게 수직이등분선이
되는 거죠.

00:52:29.873 --> 00:52:34.123

이거의 수직이등분선이 되니까
그림으로 먼저 생각을 해봤을 때,

00:52:34.223 --> 00:52:37.509

그림을 보자면 여기 x , y

00:52:37.609 --> 00:52:40.552

이렇게 만들어지는 삼각형이
있었다고 생각을 해볼게요.

00:52:40.652 --> 00:52:42.995

그런데 수직이등분선이 된다는 것은

00:52:43.095 --> 00:52:45.737

이거랑 이거랑 지금 길이가
똑같아지게 되죠.

00:52:45.837 --> 00:52:48.676

그러면 여기에 이렇게

삼각형을 그렸을 때

00:52:48.776 --> 00:52:52.163

애하고 애하고의 길이가
똑같아지게 되겠죠.

00:52:52.263 --> 00:52:54.524

두 삼각형이 합동이
나오게 되거든요.

00:52:54.624 --> 00:52:57.842

그런데 여기를 동그라미,
이것도 동그라미라고 한다면

00:52:57.942 --> 00:53:02.730

$y=x$ 라는 것은 90도를 정확하게
45도, 45도 나누기 때문에

00:53:02.830 --> 00:53:04.803

애랑 애랑 똑같아지게 되고.

00:53:04.903 --> 00:53:08.640

90도로 내려준다면 결국
이 삼각형과 이 삼각형이

00:53:08.740 --> 00:53:11.601

합동으로 나오게 되면서
여기의 길이가 x 고

00:53:11.701 --> 00:53:13.683

여기의 길이가 y 로 나오게 돼요.

00:53:13.783 --> 00:53:17.524

그러면 이 점의 좌표는
 y, x 라고 쓸 수가 있겠죠.

00:53:17.624 --> 00:53:19.966

그래서 이동된 점의 좌표를 봤을 때

00:53:20.066 --> 00:53:24.587

y 하고 x 하고 그 점의 좌표가
반대로 나오게 됩니다.

00:53:24.687 --> 00:53:26.370

이렇게 그림으로 볼 수도 있고요.

00:53:26.470 --> 00:53:28.871

식으로 보고 싶다면 x, y 를

00:53:28.971 --> 00:53:33.886

$y=x$ 에 대해서 대칭을 시킨
점이 x', y' 이라고 할 때

00:53:33.986 --> 00:53:41.080

$y=x$ 가 x, y 와
 x', y' 으로 나오게 되는

00:53:41.180 --> 00:53:43.706

이 점의 수직이등분선이 되잖아요.

00:53:43.806 --> 00:53:47.419

우리 수직이등분선 어떻게 구했었죠?

00:53:47.519 --> 00:53:52.212

둘의 중점이 여기 위에
있다는 것을 썼어요.

00:53:52.312 --> 00:53:58.438

$x+x'/2$ 과 $y+y'/2$

00:53:58.538 --> 00:54:00.122

이것이 중점이 되는데,

00:54:00.222 --> 00:54:06.118

이 중점이 $y=x$ 위의
점이 되는 것이니까

00:54:06.218 --> 00:54:08.687

이거 위의 점이 되도록 한다는 것은

00:54:08.787 --> 00:54:10.666

대입했을 때 성립한다는 거죠.

00:54:10.766 --> 00:54:13.181

둘이 똑같아지게 된다는 거예요.

00:54:13.281 --> 00:54:18.270

똑같아진다면 $x+x'$ 과
 $y+y'$ 이 서로 같으면서

00:54:18.370 --> 00:54:22.677

$x'-y'$ 이 $-x+y$ 랑 같다는

00:54:22.777 --> 00:54:26.492

x' , y' 사이의 하나의
관계식을 끌어낼 수가 있어요.

00:54:26.592 --> 00:54:29.250

내가 지금 이동된 후의
점을 좌표를 알고 싶으니까

00:54:29.350 --> 00:54:30.975

이렇게 식을 적어본 거고요.

00:54:31.075 --> 00:54:33.451

그다음에 수직 조건을 사용해서

00:54:33.551 --> 00:54:39.598

이 x , x' 으로 만들어지게
되는 점의 선분하고

00:54:39.698 --> 00:54:43.148

그다음에 $y=x$ 하고 서로
수직으로 만나게 되죠.

00:54:43.248 --> 00:54:45.576

$y=x$ 의 기울기가 1이에요.

00:54:45.676 --> 00:54:49.731

그러면 두 점이 만들어주는
기울기가 -1이 되어야지만

00:54:49.831 --> 00:54:52.986
둘을 곱해서 -1 이 나오게 되겠죠.

00:54:53.086 --> 00:54:57.165
 $y'-y$ 랑 $x-x'$ 이
서로 같아지게 돼요.

00:54:57.265 --> 00:55:02.200
그러면 $x'+y'$ 이 $x+y$ 가 된다.

00:55:02.300 --> 00:55:04.298
이런 식을 또 하나
끌어낼 수가 있습니다.

00:55:04.398 --> 00:55:07.377
그러면 2개를 연립해주면
2개를 더했을 때

00:55:07.477 --> 00:55:10.320
 $2x'=2y$ 로 나오게 되거든요.

00:55:10.420 --> 00:55:12.202
그래서 x' 이 y 가 되고요.

00:55:12.302 --> 00:55:14.445
마찬가지로 y' 이 x 가 돼요.

00:55:14.545 --> 00:55:17.678
그래서 이 x' 이 x ,
 y' 이 y 가 되는

00:55:17.778 --> 00:55:22.284
이렇게 둘을 바꾼 그런 관계가
나오게 된다는 것을 알 수가 있어서요.

00:55:22.384 --> 00:55:26.591
 $y=x$ 에 대해서
 x, y 를 대칭시켰다고 한다면

00:55:26.691 --> 00:55:29.619
 y, x 이렇게 바뀐
게 나오게 되고요.

00:55:29.719 --> 00:55:32.041
그렇다면 여기에 대입을 해줄 때는

00:55:32.141 --> 00:55:36.936
 f 에 이 y 좌표를 넣어야지만
식이 성립하고.

00:55:37.036 --> 00:55:41.910
그다음에 y 자리에는 x 좌표를 넣어야지만
식이 성립하게 될 거예요.

00:55:42.010 --> 00:55:44.147
그러니까 여기 f 에 넣을 때는

00:55:44.247 --> 00:55:46.090
 x 자리에는 y' 을 넣고

00:55:46.190 --> 00:55:49.188

y자리에 x'을 넣어줘야지만
식이 성립하겠죠.

00:55:49.288 --> 00:55:51.640
그래서 이 '을 떼놓고 적는다면

00:55:51.740 --> 00:55:54.051
 $f(y, x)=0$ 으로 나오게 돼요.

00:55:54.151 --> 00:55:58.404
 $y=-x$ 에 대한 대칭이동도
마찬가지로 해준다면

00:55:58.504 --> 00:56:02.427
저렇게 수직이등분선이라는
거를 이용해서 유도를 해주면

00:56:02.527 --> 00:56:04.803
 $-y, -x$ 로 나오게 되거든요.

00:56:04.903 --> 00:56:06.580
그러면 마찬가지로.

00:56:06.680 --> 00:56:09.758
이게 새로운 x'이고 y'일 때

00:56:09.858 --> 00:56:12.099
누구를 x자리에 넣어줘야 되나요?

00:56:12.199 --> 00:56:14.563
 $-y'$ 을 넣어줘야겠죠.

00:56:14.663 --> 00:56:18.899
 y' 이 $-x$ 니까
 $-y'$ 이 x 가 돼요.

00:56:18.999 --> 00:56:22.323
그다음에 $-x'$ 이 y 가 됩니다.

00:56:22.423 --> 00:56:25.505
이거를 여기에 넣어줘야지만
0이 나오게 되면서

00:56:25.605 --> 00:56:27.721
이렇게 원래 도형의 방정식에

00:56:27.821 --> 00:56:31.066
 $-y, -x$ 를 넣은
것이 0이 된다는 게

00:56:31.166 --> 00:56:33.057
새로운 도형의 방정식이 되고요.

00:56:33.157 --> 00:56:37.328
이번에는 임의의 점 a, b 에
대해서 대칭이동을 시켰다고 한다면

00:56:37.428 --> 00:56:41.111
어떤 좌표평면에
 a, b 라는 점이 있어요.

00:56:41.211 --> 00:56:45.469

이거에 대해서 x, y 라는
것을 대칭이동을 시킵니다.

00:56:45.569 --> 00:56:48.929

대칭시켰을 때 점을
 x', y' 이라고 하는데.

00:56:49.029 --> 00:56:51.861

이 점이 이 선분의
무슨 점이 된다고요?

00:56:51.961 --> 00:56:54.033

바로 중점이 됩니다.

00:56:54.133 --> 00:56:56.556

$x+x'/2=a$ 가 되고

00:56:56.656 --> 00:57:00.468

$y+y'/2=b$ 가 되는 거예요.

00:57:00.568 --> 00:57:03.098

그러면 x' 을 구하고 싶어요.

00:57:03.198 --> 00:57:05.262

어떻게 나오게 되죠?

00:57:05.362 --> 00:57:07.841

양변에 2를 곱해보면 $2a$,

00:57:07.941 --> 00:57:09.777

거기에 $-x$ 를 해주면 되죠.

00:57:09.877 --> 00:57:13.190

x' 만 구하려면 2배 해주고
 x 를 넘기면 되니까

00:57:13.290 --> 00:57:15.387

$2a-x$ 로 나오게 되고요.

00:57:15.487 --> 00:57:18.903

$y'=2b-y$ 로 나오게 돼요.

00:57:19.003 --> 00:57:28.187

예를 들어서 1, 3이라는 것을
2, 5에 대해서 대칭이동을 시켰다.

00:57:28.287 --> 00:57:34.396

그러면 이 방법에 의해서 그냥
결론을 딱 적는다고 한다면

00:57:34.496 --> 00:57:40.342

$2*2-1, 2*5-3$
이렇게 계산이 되면서

00:57:40.442 --> 00:57:42.679

3, 7이 된다는 거예요.

00:57:42.779 --> 00:57:44.106

정말 그런가요?

00:57:44.206 --> 00:57:50.608
그림을 그려본다면 1, 3을
2, 5에 대해서 대칭을 시킨 거예요.

00:57:50.708 --> 00:57:53.553
그러면 대칭시킨 후의 점이
여기로 오게 될 텐데

00:57:53.653 --> 00:57:55.576
이게 3, 7이 된다는 거죠.

00:57:55.676 --> 00:58:01.087
정말 그럴지 확인을 해보려면
이 2, 5가 두 점의 중점이나.

00:58:01.187 --> 00:58:03.657
계산해보면 중점으로 나오게 되죠.

00:58:03.757 --> 00:58:06.867
그래서 그거를 이렇게
공식화시켜준 거예요.

00:58:06.967 --> 00:58:08.952
 $x' = 2a - x$

00:58:09.052 --> 00:58:10.440
 $y' = 2b - y$ 가 된다.

00:58:10.540 --> 00:58:13.901
그래서 점 a, b에
대한 대칭이동은

00:58:14.001 --> 00:58:16.278
 $2a - x$ 가 되고 $2b - y$ 가

00:58:16.378 --> 00:58:18.744
새로운 점의 좌표로 나오게 되고요.

00:58:18.844 --> 00:58:21.474
도형의 식으로 나타내주려고 한다면

00:58:21.574 --> 00:58:26.033
그러면 이게 나의 새로운
 x' 이고 이게 y' 이잖아요.

00:58:26.133 --> 00:58:28.458
원래 x 를 구하려면,

00:58:28.558 --> 00:58:31.471
 $2a - x$ 가 x' 이 되었으니까

00:58:31.571 --> 00:58:36.088
 $x =$, 이라고 써준다면
 $2a - x'$ 으로 다시 나오게 되죠.

00:58:36.188 --> 00:58:39.664
 x 를 넘기고 x' 을 다시
또 보내면 되니까요.

00:58:39.764 --> 00:58:42.450
 $2b - y = y'$ 이니까

00:58:42.550 --> 00:58:45.842
원래 $y=2b-y'$ 이 되거든요.

00:58:45.942 --> 00:58:48.497
그래서 도형의 방정식에 넣어줄 때

00:58:48.597 --> 00:58:51.164
 $2a-x'$ 을 x 자리에 넣고

00:58:51.264 --> 00:58:56.648
 $2b-y'$ 을 y 자리에 넣어줘야지만
0이 나오게 되는 거예요.

00:58:56.748 --> 00:59:00.666
그런데 x' , y' 은
보통 빼고 써주게 되니까

00:59:00.766 --> 00:59:04.258
이렇게 $f(2a-x, 2b-y)=0$ 이다.

00:59:04.358 --> 00:59:06.057
이런 식으로 나타내지게 되고.

00:59:06.157 --> 00:59:07.690
대칭이동은 편한 게,

00:59:07.790 --> 00:59:09.924
사실 이게 편하니까
여러분이 그렇게 외웁니다.

00:59:10.024 --> 00:59:12.059
점을 이동시키는 거랑
도형을 이동시키는 거랑

00:59:12.159 --> 00:59:15.825
결과적으로 보면 모양이 어떻게
무엇을 대입하느냐는 것이

00:59:15.925 --> 00:59:17.568
똑같이 나오게 되는데.

00:59:17.668 --> 00:59:18.996
둘은 완전히 다른 거예요.

00:59:19.096 --> 00:59:20.990
이거는 좌표, 하나의 점이에요.

00:59:21.090 --> 00:59:23.156
이거는 점들의 모임입니다.

00:59:23.256 --> 00:59:24.613
성격이 달라요.

00:59:24.713 --> 00:59:26.942
점 하나의 위치가
이렇게 된다는 거고.

00:59:27.042 --> 00:59:29.653
어떤 도형의 방정식이냐.

00:59:29.753 --> 00:59:31.284

애는 식.

00:59:31.384 --> 00:59:35.190

여기는 x, y 가 있으니까 마치
여러분이 식처럼 생각하는데

00:59:35.290 --> 00:59:36.863

이거는 점이예요.

00:59:36.963 --> 00:59:38.698

그래서 이렇게 점이 이동되고

00:59:38.798 --> 00:59:41.942

이 식을 만족하게 되고,
이렇게 이해해주면 되겠어요.

00:59:42.042 --> 00:59:44.285

그러면 예제를 쭉 풀어보겠습니다.

00:59:44.385 --> 00:59:47.971

a, b 를 x 축에
대해서 대칭이동했다.

00:59:48.071 --> 00:59:50.032

어떻게 되죠?

00:59:50.132 --> 00:59:52.857

y 의 값만 음수가 되는 거죠.

00:59:52.957 --> 00:59:55.933

x 축에 대해서 대칭이동을 시켰으니까

00:59:56.033 --> 00:59:58.957

a, b 라는 것을
 y 그대로 유지가 되면서

00:59:59.057 --> 01:00:01.898

이거랑 이거랑 길이가
같아지게 되기 때문에

01:00:01.998 --> 01:00:04.754

$a, -b$ 로 이렇게 나오게 되고.

01:00:04.854 --> 01:00:08.102

이거를 원점에 대해서
대칭이동시켰다고 하면

01:00:08.202 --> 01:00:11.767

애하고 애하고의 중점이
원점이 되면 되는 거니까

01:00:11.867 --> 01:00:15.602

둘 다 부호가 반대가 되면 둘을
더했을 때 0, 0이 나오면서

01:00:15.702 --> 01:00:17.424

중점이 원점이 된다는 거예요.

01:00:17.524 --> 01:00:20.584

그래서 애는 그대로 유지가

되면서 길이가 같으니까

01:00:20.684 --> 01:00:22.848

y좌표만 부호가 반대로.

01:00:22.948 --> 01:00:27.518

이거는 중점이 원점이 되기 때문에
둘 다 부호가 반대로 되면서

01:00:27.618 --> 01:00:29.670

-a, b로 나오게 되는데.

01:00:29.770 --> 01:00:33.086

그것이 3, -2가 되었다는 거죠.

01:00:33.186 --> 01:00:35.249

그래서 a를 구해보면 -3

01:00:35.349 --> 01:00:38.088

b를 구해보면 -2

01:00:38.188 --> 01:00:40.865

이렇게 각각 a, b의
값을 찾아줄 수가 있고요.

01:00:40.965 --> 01:00:44.360

이번에는 직선을 y축에
대해서 대칭이동을 시켰다.

01:00:44.460 --> 01:00:48.182

$2x-3y+a$ 라는 직선이 있었어요.

01:00:48.282 --> 01:00:52.292

원래 저거를 표준형으로
바꿔서 적어본다면

01:00:52.392 --> 01:00:55.385

$y=2/3x+a/3$

01:00:55.485 --> 01:00:58.953

이런 식으로 기울기가
3분의 2가 되도록 나오게 되겠죠.

01:00:59.053 --> 01:01:00.722

a가 뭐였는지는 모르겠지만,

01:01:00.822 --> 01:01:03.368

절편이 어디있는지는 모르겠지만
이 정도가 되는데.

01:01:03.468 --> 01:01:06.260

이거를 y축에 대해서
대칭이동시켰어요.

01:01:06.360 --> 01:01:07.796

y축으로 접었어요.

01:01:07.896 --> 01:01:10.097

그러면 이런 식으로 직선이
나오게 될 거고.

01:01:10.197 --> 01:01:14.307

이것이 1, 2라는 점을
지나가게 되었다는 거예요.

01:01:14.407 --> 01:01:19.681

1, 2를 지난다는 거는 대칭이동시킨
식에 1, 2를 대입했을 때

01:01:19.781 --> 01:01:22.034

식이 성립하게 된다는 것을 뜻하죠.

01:01:22.134 --> 01:01:26.994

그래서 우리는 이
 $2x-3y+a=0$ 이라는 것을

01:01:27.094 --> 01:01:30.517

대칭이동시킨 식이 어떻게
되느냐를 보면 됩니다.

01:01:30.617 --> 01:01:32.236

아까 어떻게 하면 된다고 했죠?

01:01:32.336 --> 01:01:34.542

y축에 대해서 대칭시킬 때는

01:01:34.642 --> 01:01:39.743

x에만 -x를 붙여서 식을
구하면 된다고 했습니다.

01:01:39.843 --> 01:01:41.254

왜 그렇죠?

01:01:41.354 --> 01:01:44.353

여기 위에 있는 점
x, y라는 점은

01:01:44.453 --> 01:01:47.890

x, y가 헛갈리면 a,
b라고 생각을 해봐도 돼요.

01:01:47.990 --> 01:01:50.223

a, b라는 점은 여기에 가서

01:01:50.323 --> 01:01:54.790

y축에 대해서 대칭이동을 시켰으니까
a, -b가 되는 거죠.

01:01:54.890 --> 01:01:57.708

그러면 a, -b를
이 식에 대입해서

01:01:57.808 --> 01:02:00.390

식이 성립하도록 하려고 할 때는,

01:02:00.490 --> 01:02:02.646

죄송해요, 이거 -a, b죠.

01:02:02.746 --> 01:02:05.557

y축에 대해서 대칭이니까
x만 부호가 반대가 되죠.

01:02:05.657 --> 01:02:07.785

그래서 서로 반대쪽에
있으니까 이렇게 되고.

01:02:07.885 --> 01:02:12.718

여기에 식을 대입해서
성립하도록 하려고 한다면

01:02:12.818 --> 01:02:16.570

여기에 -를 붙여놔야 원래
a, b로 돌아오면서

01:02:16.670 --> 01:02:18.415

식이 성립되는 거잖아요.

01:02:18.515 --> 01:02:22.106

그래서 -를 붙인 것을
넣는다고 설명을 드렸어요.

01:02:22.206 --> 01:02:26.737

결과적으로
 $-2x-3y+a=0$ 이에요.

01:02:26.837 --> 01:02:30.109

그런데 이것이 1, 2를 지나니까

01:02:30.209 --> 01:02:33.176

1, 2를 대입했을 때
식이 성립한다는 거죠.

01:02:33.276 --> 01:02:36.168

그래서 a는 8이라고
구해줄 수가 있습니다.

01:02:36.268 --> 01:02:39.298

이번에는 이 원을 x축에
대해서 대칭이동하고

01:02:39.398 --> 01:02:41.143

$y=x$ 에 대해서 대칭이동했다.

01:02:41.243 --> 01:02:44.046

이동을 좀 편리하게 하기 위해서

01:02:44.146 --> 01:02:47.089

일단 식을 표준형으로
바꿔보도록 하겠습니다.

01:02:47.189 --> 01:02:51.565

그러면 중심이 2, -3이 되고

01:02:51.665 --> 01:02:54.862

반지름이 3인 원이었네요.

01:02:54.962 --> 01:02:57.624

이거를 x축에 대해서 대칭이동해요.

01:02:57.724 --> 01:03:00.805

그러면 x축에 대해서 대칭이동하니까

01:03:00.905 --> 01:03:03.541

y만 부호가 -로 바뀌게 되고요.

01:03:03.641 --> 01:03:06.707
그다음에 $y=x$ 에
대해서 대칭이동했다.

01:03:06.807 --> 01:03:07.802
어떻게 되죠?

01:03:07.902 --> 01:03:13.113
이 상황에서 y하고 x하고
자리를 바꿔주면 되는 거예요.

01:03:13.213 --> 01:03:14.454
그래서 이렇게 나옵니다.

01:03:14.554 --> 01:03:15.993
식을 좀 보기좋게 정리하면,

01:03:16.093 --> 01:03:19.980
 $(-x+3)^2$ 과
 $(x-3)^2$ 은 서로 같죠?

01:03:20.080 --> 01:03:24.048
 $(y-2)^2$ 이 나오게
되고 9가 되었어요.

01:03:24.148 --> 01:03:30.155
대칭이동을 하더라도 지금
보니까 반지름은 그대로예요.

01:03:30.255 --> 01:03:32.555
그리고 중심이 어떻게
바뀌었나 보면,

01:03:32.655 --> 01:03:34.828
원래 2, -3이 중심이었죠.

01:03:34.928 --> 01:03:36.882
x축에 대해서 대칭이동하니까

01:03:36.982 --> 01:03:41.749
이 식에 넣으니까 2, 3으로
y좌표만 음수 바뀐 거 확인되죠.

01:03:41.849 --> 01:03:47.272
그리고 여기서 x, y 자리를
서로 x랑 y만 뜯어서 바꿨어요.

01:03:47.372 --> 01:03:49.555
여기서 조심해야 될 거.

01:03:49.655 --> 01:03:51.878
x랑 -y를 바꾼 것이 아니라

01:03:51.978 --> 01:03:53.561
x랑 y만 바꾼 거예요.

01:03:53.661 --> 01:03:56.435
그래서 이 -있고
이 y자리에 x가 들어갔고

01:03:56.535 --> 01:03:59.131
그다음에 x 자리에 y 가 들어갔어요.

01:03:59.231 --> 01:04:03.359
그래서 새로 생긴 중심을
보니까 3, 2가 되어서

01:04:03.459 --> 01:04:07.408
애랑 서로 자리 바뀐, $y=x$ 에 대해서
대칭된 상태가 되는 것이 맞죠.

01:04:07.508 --> 01:04:10.974
그래서 이것이 새로운
원의 방정식이 되고

01:04:11.074 --> 01:04:14.703
그다음에 원의 중심의 좌표를
구해 보니까 3, 2가 나온다.

01:04:14.803 --> 01:04:16.390
이렇게 볼 수가 있고요.

01:04:16.490 --> 01:04:20.851
이번에는 1, 1이라는
것을 $y=2x+3$ 에 대하여

01:04:20.951 --> 01:04:22.696
대칭시키라고 했어요.

01:04:22.796 --> 01:04:26.258
이거는 우리 아까 표로
정리한 내용이 아닙니다.

01:04:26.358 --> 01:04:29.851
딱 공식화시켜서 기억을
하고 있는 내용은 아닌데,

01:04:29.951 --> 01:04:31.688
이런 문제가 종종 나와요.

01:04:31.788 --> 01:04:34.798
그래서 한번 다뤄보고
싶어서 넣었고요.

01:04:34.898 --> 01:04:38.113
1, 1을 이거에 대해서
대칭이동시켰다.

01:04:38.213 --> 01:04:41.277
그러면 대칭이동의 큰
원리를 생각해볼게요.

01:04:41.377 --> 01:04:43.742
직선에 대해서 대칭이동하죠.

01:04:43.842 --> 01:04:48.622
 $y=2x+3$ 이라는 이 직선에
대해서 대칭이동시키잖아요.

01:04:48.722 --> 01:04:52.215

그러면 이동된 후의 점이
어디로 갈까 생각했을 때

01:04:52.315 --> 01:04:53.786
여기로 오게 되고.

01:04:53.886 --> 01:04:56.062
이거를 a , b 라고 표현해볼게요.

01:04:56.162 --> 01:05:00.651
이렇게 나타냈을 때 이 직선이
이 선분의 무슨 선이라고요?

01:05:00.751 --> 01:05:04.550
수직이등분선이 된다는
것을 이용해주면 됩니다.

01:05:04.650 --> 01:05:11.552
 $y=2x+3$ 이 선분 AA' 의
수직이등분선이라는 거예요.

01:05:11.652 --> 01:05:16.031
수직이등분선이라고 한다면 우리가
앞에 직선에서도 봤었죠?

01:05:16.131 --> 01:05:22.788
사용할 때 수직 조건과 이등분 조건
두 가지를 사용해줄 수가 있어요.

01:05:22.888 --> 01:05:25.576
아까 제가 $y=x$ 대칭할
때도 보여드렸죠.

01:05:25.676 --> 01:05:28.017
아까는 제가 이등분을
먼저 했었는데,

01:05:28.117 --> 01:05:29.803
지금 수직을 먼저 해볼게요.

01:05:29.903 --> 01:05:31.248
순서는 당연히 상관없어요.

01:05:31.348 --> 01:05:32.939
수직 조건을 써본다면,

01:05:33.039 --> 01:05:36.980
 AA' 과 그다음에 이
직선이 수직인 거니까

01:05:37.080 --> 01:05:40.188
 AA' 으로 이루어지는
직선의 기울기.

01:05:40.288 --> 01:05:42.878
 $b-1/a-1$ 이 나오게 될 텐데.

01:05:42.978 --> 01:05:45.999
이거랑 수직이 되도록 하려면
기울기가 얼마여야 되죠?

01:05:46.099 --> 01:05:48.946

기울기의 곱이 -1이
되어야 하는 것이니까

01:05:49.046 --> 01:05:50.721

-1/2가 되겠죠.

01:05:50.821 --> 01:05:53.357

그러면 이렇게 이렇게
해서 식을 정리해보면

01:05:53.457 --> 01:05:56.757

$a-1=-2b+2$ 가 서로 같겠네요.

01:05:56.857 --> 01:05:59.765

여기에 1 곱하고 여기에
-2 곱했을 때.

01:05:59.865 --> 01:06:02.101

$a+2b=3$ 이라는

01:06:02.201 --> 01:06:04.536

a, b에 대한 방정식
하나를 얻을 수가 있어요.

01:06:04.636 --> 01:06:05.970

그다음에 이등분 조건.

01:06:06.070 --> 01:06:15.990

AA'의 선분의 중점이 $y=2x+3$
위의 점이라는 거예요.

01:06:16.090 --> 01:06:19.799

이 직선의 위에서 나뉘었으니까
수직이등분 되었으니까

01:06:19.899 --> 01:06:25.585

애의 중점을 구해보면 중점이
 $a+1/2, b+1/2$ 인데

01:06:25.685 --> 01:06:29.987

그것이 이거 위의 점이라는 거는
대입해서 성립한다는 거를 의미하죠.

01:06:30.087 --> 01:06:35.133

$b+1/2=2*a+1/2+3$ 이
된다는 거죠.

01:06:35.233 --> 01:06:39.516

$b+1$ 은 양변에 2를 곱해서
아예 정리를 해보면

01:06:39.616 --> 01:06:41.392

이런 관계식 만족하게 되고요.

01:06:41.492 --> 01:06:45.209

$2a-b$ 가 8 넘기면
-7 나오게 되죠.

01:06:45.309 --> 01:06:47.636

그러면 둘을 연립해주는 거예요.

01:06:47.736 --> 01:06:49.359
 $a+2b=3$ 이 고요.

01:06:49.459 --> 01:06:51.174
여기에 2배 해줄까요?

01:06:51.274 --> 01:06:54.214
 $4a-2b=-14$ 가 되죠.

01:06:54.314 --> 01:06:59.721
둘을 더했을 때 $5a=-11$ 로
나오게 되죠.

01:06:59.821 --> 01:07:01.492
14에서 3을 빼주니까.

01:07:01.592 --> 01:07:06.876
그래서 $a=-11/5$ 로
나오게 되고요.

01:07:06.976 --> 01:07:10.484
그다음에 $2b=3-a$ 가 되죠?

01:07:10.584 --> 01:07:16.697
그러면 $3+11/5$, 이렇게
나오면서 $26/5$ 으로 나오니까

01:07:16.797 --> 01:07:19.534
 b 를 구한다면 $13/5$ 이 됩니다.

01:07:19.634 --> 01:07:25.068
 $-11/5$, $13/5$ 라고 하는 점의
좌표를 찾을 수가 있는 거예요.

01:07:25.168 --> 01:07:28.919
이렇게 일반적인 상황도
수직이등분선이라는

01:07:29.019 --> 01:07:33.078
대칭시키는 원리만 알고 있다면

01:07:33.178 --> 01:07:35.816
점의 좌표를 여러분이
충분히 구할 수 있어요.

01:07:35.916 --> 01:07:38.985
이거는 약간 어려울 수는 있는데,

01:07:39.085 --> 01:07:44.777
모든 교과서에서 나오는 예제여서 안
다룰 수가 없어서 가져왔습니다.

01:07:44.877 --> 01:07:48.016
대칭이동을 응용해서 아주
쉽게 풀 수 있는 문제예요.

01:07:48.116 --> 01:07:49.917
그냥 풀려고 하면 너무 어려워요.

01:07:50.017 --> 01:07:54.266

제가 결론을 대칭이동이라고 힌트를 드렸는데 한번 풀어보세요.

01:07:54.366 --> 01:07:56.878
제가 힌트는 대칭이동이라고 했어요.

01:07:56.978 --> 01:08:00.146
대칭이동의 원리를 생각하는 거예요.

01:08:00.246 --> 01:08:03.018
대칭이동이라는 것은 점에 대한 거는 중점이 된다.

01:08:03.118 --> 01:08:07.076
직선에 대한 대칭이동은 그 직선이 선분에 수직이등분선이 된다.

01:08:07.176 --> 01:08:09.438
이 원리를 생각해주면 되는데.

01:08:09.538 --> 01:08:11.931
A가 2, 3이고요.

01:08:12.031 --> 01:08:15.942
B가 4, 5로 되어있죠.

01:08:16.042 --> 01:08:18.546
여기 이렇게 위치하고 있는 A, B가 있고

01:08:18.646 --> 01:08:20.946
x축 위에 점 P가 있습니다.

01:08:21.046 --> 01:08:23.235
어떤 점 P가 여기 있었다고 해볼까요?

01:08:23.335 --> 01:08:28.565
AP+BP를 한 것의 최솟값을 구해보자고 했어요.

01:08:28.665 --> 01:08:31.773
그러면 일단 여러분이 쉽게 생각할 수 있는 것.

01:08:31.873 --> 01:08:33.434
이런 생각을 했을 것 같아요.

01:08:33.534 --> 01:08:35.799
x축 위의 점이라고 하니까

01:08:35.899 --> 01:08:38.694
a를 a, 0 이렇게 놔볼 수 있다고.

01:08:38.794 --> 01:08:41.650
앞에 제가 도형의 방정식 처음 시작할 때

01:08:41.750 --> 01:08:45.143
축 위의 점이라고 하면

y좌표가 항상 0인 거니까

01:08:45.243 --> 01:08:48.609

그러니까 기본적으로 식을
써보라고 나타내줄 수가 있고.

01:08:48.709 --> 01:08:53.713

AP+BP를 해주면

$\sqrt{(x-a)^2+9}$,

01:08:53.813 --> 01:08:57.978

죄송해요, x-a가 아니라

01:08:58.078 --> 01:09:02.350

a, 0과 2, 3 사이의
거리니까 $(a-2)^2+9$

01:09:02.450 --> 01:09:06.428

그리고

$\sqrt{(a-4)^2+25}$

01:09:06.528 --> 01:09:08.061

이런 식으로 나타내지게 되는데.

01:09:08.161 --> 01:09:09.977

이거는 최솟값이 얼마죠?

01:09:10.077 --> 01:09:13.071

$(a-2)^2$ 이 항상
0보다 크거나 같으니까

01:09:13.171 --> 01:09:16.185

이거의 최솟값은 $\sqrt{9}$ 예요.

01:09:16.285 --> 01:09:19.012

그런데 이거의 최솟값은 $\sqrt{25}$ 예요.

01:09:19.112 --> 01:09:23.283

그러면 둘을 더해서 $3+5=8$ 이
바로 최솟값이 될까요?

01:09:23.383 --> 01:09:24.454

절대 아니죠.

01:09:24.554 --> 01:09:29.864

애는 언제 최소?

a가 2일 때 최소가 되고요.

01:09:29.964 --> 01:09:34.627

이거는 a가 4일 때 최소예요.

01:09:34.727 --> 01:09:37.465

그런데 같은 a에 대해서
최소가 나와야 하잖아요.

01:09:37.565 --> 01:09:39.254

2개가 서로 다릅니다.

01:09:39.354 --> 01:09:42.355

2라는 것과 4라는 것은
2개가 서로 같지 않아요.

01:09:42.455 --> 01:09:45.879

그렇기 때문에 이런 방법으로는
풀 수가 없다는 거예요.

01:09:45.979 --> 01:09:49.560

그림으로 보여드리자면 A가
2일 때는 어떤 상황이나면

01:09:49.660 --> 01:09:52.359

이렇게 A에서 x축까지
최단거리로 가는 거는

01:09:52.459 --> 01:09:54.326

당연히 수직으로 내려가는 거잖아요.

01:09:54.426 --> 01:09:56.682

A에 대해서는 이렇게
될 때가 최단인데

01:09:56.782 --> 01:09:58.997

그러면 B쪽에서 멀어지게 되고.

01:09:59.097 --> 01:10:01.573

B의 입장에서는 이렇게
될 때 최단인데

01:10:01.673 --> 01:10:04.644

그러면 A에서부터 또
이거보다는 멀어지게 되고.

01:10:04.744 --> 01:10:07.517

어디에서 밸런스를 잡아야
될 것이냐는 것이

01:10:07.617 --> 01:10:09.498

식으로 보기에는 어렵습니다.

01:10:09.598 --> 01:10:13.237

√가 들어가있는 식이기 때문에
다루기가 어려워지는 거예요.

01:10:13.337 --> 01:10:17.929

그래서 이게 어려운 이유가
무엇일까를 생각해보면

01:10:18.029 --> 01:10:22.165

A에 대해서 애가
지금 2, 3이다.

01:10:22.265 --> 01:10:25.579

그다음에 B가 4, 5가
된다고 되어있는데,

01:10:25.679 --> 01:10:28.714

이것이 같은 쪽에 있어요.

01:10:28.814 --> 01:10:31.040

x축에 대해서 같은 쪽에 위치하니까

01:10:31.140 --> 01:10:34.144

뭔가 꺾여서 모양을
보는 것이 어렵거든요.

01:10:34.244 --> 01:10:36.012
그런데 아까 우리가 식을 봤죠.

01:10:36.112 --> 01:10:40.359
 $(a-2)^2+9$ 랑
 $(a-4)^2+25$ 라는

01:10:40.459 --> 01:10:44.618
이 식을 봤는데 여기서
 $(a-2)^2+9$ 라고 할 때

01:10:44.718 --> 01:10:46.576
애는 3^2 이고요.

01:10:46.676 --> 01:10:50.002
25는 B의 y좌표가
5였으니까 5^2 이에요.

01:10:50.102 --> 01:10:53.426
그러니까 이제
a, 0과 그다음에 2, 3

01:10:53.526 --> 01:10:56.012
그리고 4, 5 사이의
거리가 되는데

01:10:56.112 --> 01:10:57.923
이 2, 3이라고 할 때.

01:10:58.023 --> 01:11:01.865
그래서
 $(a-2)^2+(0-3)^2$ 이었죠.

01:11:01.965 --> 01:11:04.804
그다음에 이거는
 $(0-5)^2$ 이 되는 거죠.

01:11:04.904 --> 01:11:06.720
이렇게 식이 나오는데,

01:11:06.820 --> 01:11:15.059
이 식을 가만히 보면
 $\sqrt{(a-2)^2+(0+3)^2}$ 이라고 해도

01:11:15.159 --> 01:11:16.849
같은 식 아닌가요?

01:11:16.949 --> 01:11:20.931
 $(0+3)^2$ 이라고 하는
것은 $(a-2)^2$ 에

01:11:21.031 --> 01:11:24.560
 $(0-(-3))^2$ 이라고 하더라도

01:11:24.660 --> 01:11:27.345
어차피 값이 다 9가
되어서 똑같잖아요.

01:11:27.445 --> 01:11:33.032

즉 2, 3에서 y 의
좌표를 2, -3으로

01:11:33.132 --> 01:11:35.174

이렇게 바꿔놓고 생각을 하더라도

01:11:35.274 --> 01:11:39.513

AP하고 이 길이가 그대로
유지가 될 거라는 거죠.

01:11:39.613 --> 01:11:41.813

그렇게 -3으로
바꾼다는 게 뭐냐면,

01:11:41.913 --> 01:11:46.101

x 축에 대해서 대칭이동한
점을 생각해 보는 거예요.

01:11:46.201 --> 01:11:49.609

2, -3이라고 x 축에
대해서 대칭이동한 점을

01:11:49.709 --> 01:11:51.490

A'이라고 해볼게요.

01:11:51.590 --> 01:11:54.663

그러면 P가 어디에
있었던지 관계없이

01:11:54.763 --> 01:11:58.889

AP하고 A'P하고는
서로 어떤가요?

01:11:58.989 --> 01:12:01.656

당연히 같을 수밖에 없다는 거죠.

01:12:01.756 --> 01:12:03.347

x 축 위의 점이잖아요.

01:12:03.447 --> 01:12:05.981

그런데 x 축에 대해서
대칭시켰잖아요.

01:12:06.081 --> 01:12:11.553

x 축이 이제 AA'의
수직이등분선이 됩니다.

01:12:11.653 --> 01:12:13.375

수직이등분선이 됐어요.

01:12:13.475 --> 01:12:15.908

이렇게 x 축에 대해서
대칭을 시켰으니까.

01:12:16.008 --> 01:12:20.291

그렇기 때문에 이 대칭축
위에 있는 임의의 점을

01:12:20.391 --> 01:12:22.394

아무거나 선택을 한다고 할지라도

01:12:22.494 --> 01:12:25.729

AP+A'P는 같을
수밖에 없는 거죠.

01:12:25.829 --> 01:12:30.319

그렇다면 내가 구해야 되는 것이
AP+BP의 최솟값이었잖아요.

01:12:30.419 --> 01:12:32.042

이거의 최솟값을 구하는 것과

01:12:32.142 --> 01:12:39.061

A'P+BP, 이렇게 둘을 더해준
것이 같아지게 되거든요.

01:12:39.161 --> 01:12:43.904

즉 이 그림에서 보면 AP+BP
이렇게 더하는 것과

01:12:44.004 --> 01:12:46.601

A'P+BP가 같다는 거예요.

01:12:46.701 --> 01:12:51.616

그러면 나는 애를 이렇게 더하는
대신에 이렇게 더할 거야.

01:12:51.716 --> 01:12:54.499

x축의 점의 통과하도록 하면서.

01:12:54.599 --> 01:12:59.805

그러면 어떻게 가는 것이 이제
가장 최단이라고 할 수가 있나요?

01:12:59.905 --> 01:13:03.715

애네가 x축에 대해서 서로
반대 방향에 위치하게 됐어요.

01:13:03.815 --> 01:13:06.356

그냥 일직선으로 연결하면 어때요?

01:13:06.456 --> 01:13:10.818

쭉 연결해주면 이게 여기에
있는 P에 대해서

01:13:10.918 --> 01:13:12.593

애가 최단으로 나오게 됩니다.

01:13:12.693 --> 01:13:14.909

A'B를 생각했을 때

01:13:15.009 --> 01:13:20.926

이거의 A'과 B사이의
P가 존재하잖아요.

01:13:21.026 --> 01:13:25.363

아까 같은 경우는 그냥 AB
연결하면 당연히 x축 안 지나는데,

01:13:25.463 --> 01:13:29.305

같은 쪽에 있으니까

보내놓고 쪽 연결하면

01:13:29.405 --> 01:13:33.431

P가 여기에 있다고
생각했을 때 AP+BP랑

01:13:33.531 --> 01:13:37.944

A'P+BP가 똑같으니까 이게
최단 거리로 나오게 됩니다.

01:13:38.044 --> 01:13:40.530

그래서 이거의 길이만 계산해준다면

01:13:40.630 --> 01:13:44.590

4 빼기 2의 제곱,
5 빼기 3의 제곱 그러면 64가 되니까

01:13:44.690 --> 01:13:49.231

$\sqrt{68}$ 이 되면서 $2\sqrt{17}$ 이
최솟값이라고 구할 수가 있는 거예요.

01:13:49.331 --> 01:13:53.349

정리를 하자면 x축 위의
점 P를 통과를 하면서

01:13:53.449 --> 01:13:55.921

AP+BP의 최솟값을
구하고 싶어요.

01:13:56.021 --> 01:13:58.930

x축 위의 점이었으니까
이 x축에 대해서

01:13:59.030 --> 01:14:03.318

어떤 점을 찍더라도 같은 길이를
나타내주도록 하기 위해서

01:14:03.418 --> 01:14:06.959

A 또는 B 중에 하나를 골라서
x축에 대해서 대칭시켜요.

01:14:07.059 --> 01:14:08.876

그다음에 연결하면 된다는 거예요.

01:14:08.976 --> 01:14:12.809

앞으로 문제가 x축 위의
점 말고 y축 위의 점,

01:14:12.909 --> 01:14:15.410

$y=x$ 위의 점 이런
식으로 나올 텐데

01:14:15.510 --> 01:14:20.284

어디 위에 있어야 된다는 것에
같은 쪽의 위치에서 꺾여야 된다.

01:14:20.384 --> 01:14:22.043

꺾여야 되는 상황이라고 한다면

01:14:22.143 --> 01:14:24.884

그 축에 대해서 점 하나를

보내서 연결해주면

01:14:24.984 --> 01:14:26.735

최솟값이 될 수 있는 것이죠.

01:14:26.835 --> 01:14:29.561

바로 대칭축에 만들어지는 방법,

01:14:29.661 --> 01:14:33.309

수직이등분선이 된다는 성질

덕분에 가능한 일입니다.

01:14:33.409 --> 01:14:37.848

사실 여기서 내용은 기억해야

될 거는 별 거 없어요.

01:14:37.948 --> 01:14:40.201

평행이동할 때 어떻게 이동되는지

01:14:40.301 --> 01:14:42.379

대칭이동할 때 어떻게 이동되는지

01:14:42.479 --> 01:14:45.379

그 결과만 외우셔도 문제는

다 풀 수 있습니다.

01:14:45.479 --> 01:14:47.050

점은 어떻게 된다 그랬죠?

01:14:47.150 --> 01:14:49.062

평행이동시키면 그냥 더해주고.

01:14:49.162 --> 01:14:51.244

점에 좌표에 a 만큼,

b 만큼 더하고.

01:14:51.344 --> 01:14:54.773

그다음에 도형은 a 만큼,

b 만큼 빼서 대입해주고.

01:14:54.873 --> 01:14:57.521

대칭이동 같은 경우는

점을 이동시키는 거랑

01:14:57.621 --> 01:15:00.414

도형을 이동시키는 거랑

똑같다고 나오게 되는데.

01:15:00.514 --> 01:15:03.600

왜 도형을

$f(x, y)=0$ 이라고 썼는지

01:15:03.700 --> 01:15:06.896

그리고 왜 그 점의 좌표로부터

식이 그렇게 되는지

01:15:06.996 --> 01:15:08.761

이해를 잘 해주셨으면 좋겠고요.

01:15:08.861 --> 01:15:11.292

문제 같이 풀어볼게요.

01:15:11.392 --> 01:15:16.828
이 좌표평면에서 점 애를 이거로
옮기는 평행이동이 있다고요.

01:15:16.928 --> 01:15:19.937
x 방향으로 얼마큼 갔다고
할 수가 있나요?

01:15:20.037 --> 01:15:23.478
x축의 방향으로 3만큼 내려왔죠.

01:15:23.578 --> 01:15:25.478
그러니까 -3만큼 이동해서

01:15:25.578 --> 01:15:28.460
1에 -3을 더하면 -2가 되죠?

01:15:28.560 --> 01:15:32.181
4에 얼마를 더하면 a가 되죠?

01:15:32.281 --> 01:15:38.130
a-4만큼을 더해주면
바로 a가 나오게 되죠.

01:15:38.230 --> 01:15:41.012
그래서 x축으로는 -3만큼,

01:15:41.112 --> 01:15:44.154
y축으로 a-4만큼 더해줘서

01:15:44.254 --> 01:15:46.329
a가 나오는 이런
평행이동이 있는데.

01:15:46.429 --> 01:15:48.427
이 원이 여기로 옮겨진다.

01:15:48.527 --> 01:15:51.702
원이 어떻게 이동됐는지
쉽게 파악을 해주려면

01:15:51.802 --> 01:15:54.808
이 원의 중심을 보는 것이 좋겠죠.

01:15:54.908 --> 01:15:59.044
중심을 잘 보도록 하기
위해서 표준형으로 바꿔주면

01:15:59.144 --> 01:16:06.587
 $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 4$ 가
된다는 식이 나오고요.

01:16:06.687 --> 01:16:14.013
이거는
 $(x+b/2)^2 + (y-9)^2$ 으로

01:16:14.113 --> 01:16:19.884
이렇게 식이 정리가 되어서
 $-b^2/4 - 81 + c = 0$

01:16:19.984 --> 01:16:21.165
이렇게 되네요.

01:16:21.265 --> 01:16:28.944
중심이 $-b/2$, 그리고
 y 쪽은 9가 나오고 되었고요.

01:16:29.044 --> 01:16:33.171
반지름의 제곱이 이렇게
정리가 되게 돼요.

01:16:33.271 --> 01:16:36.104
그랬을 때 상황을 보자면,

01:16:36.204 --> 01:16:39.508
여기서 중심의 좌표가 -4, 3이고

01:16:39.608 --> 01:16:42.614
반지름에 제곱을 해준
것이 4였어요.

01:16:42.714 --> 01:16:45.819
애는 아예 반지름의 제곱을
가지고 값을 써볼게요.

01:16:45.919 --> 01:16:51.472
이렇게 됐다면 애가 평행이동이
 x 축의 방향으로 -3만큼,

01:16:51.572 --> 01:16:54.395
 y 축의 방향으로 $a-4$ 만큼
가는 거였죠.

01:16:54.495 --> 01:16:59.924
그거에 의해서 중심이
 $-b/2$, 9로 오게 되었고.

01:17:00.024 --> 01:17:04.592
반지름의 제곱이
 $b^2/4 + 81 - c$ 가 된 거예요.

01:17:04.692 --> 01:17:09.011
그러면 -4에 -3을 더해준 것이

01:17:09.111 --> 01:17:12.569
바로 $-b/2$ 가 되어야 하는 거죠.

01:17:12.669 --> 01:17:16.257
중심이 그대로 평행이동이
되는 것이니까.

01:17:16.357 --> 01:17:21.605
그래서 b 의 값이 14가 된다고
바로 찾을 수가 있겠네요.

01:17:21.705 --> 01:17:26.015
그리고 3에 $a-4$ 만큼을
더해준 것이

01:17:26.115 --> 01:17:27.930
바로 9가 나오게 된 거죠.

01:17:28.030 --> 01:17:31.611

그래서 a의 값은 10이
된다고 찾을 수가 있어요.

01:17:31.711 --> 01:17:36.829

그리고 이 반지름의 제곱 비교해보면
2개는 똑같아야 하잖아요.

01:17:36.929 --> 01:17:41.417

그렇기 때문에 4하고 4분의
b의 제곱은 196이죠?

01:17:41.517 --> 01:17:45.288

+81-c해준 것이
똑같아야 하죠?

01:17:45.388 --> 01:17:51.186

그러면 애는 $4 \times 4 = 16$ 과
 $4 \times 9 = 36$ 이니까 $49 + 81$

01:17:51.286 --> 01:17:52.674

이렇게 나오게 되고.

01:17:52.774 --> 01:17:54.836

그러면 c를 구하게 된다면

01:17:54.936 --> 01:17:57.756

c를 넘기고 4를 가지고
와서 계산했을 때

01:17:57.856 --> 01:18:00.264

$49 + 81 - 4$ 가 나오게 되네요.

01:18:00.364 --> 01:18:02.958

제가 1번부터 계산이
복잡한 문제를 넣었군요.

01:18:03.058 --> 01:18:07.754

그러면 45하고 81하고
먼저 계산하고 더해보면

01:18:07.854 --> 01:18:09.799

126이 나오게 되겠죠.

01:18:09.899 --> 01:18:13.208

그래서 3개를 더해보면
a가 10, b가 14

01:18:13.308 --> 01:18:20.305

둘 더해서 24에 126을 마저
더해주니까 150 나오게 되죠.

01:18:20.405 --> 01:18:22.712

그래서 3개의 합을 이런
식을 구할 수가 있어요.

01:18:22.812 --> 01:18:25.356

평행이동했을 때 중심의
좌표만 변하고

01:18:25.456 --> 01:18:27.774
반지름은 변하지 않는다는
거를 이용해주면

01:18:27.874 --> 01:18:30.783
계산을 잘 했을 때 나오게
될 수가 있는 거고요.

01:18:30.883 --> 01:18:33.116
이번에는 직선이 있습니다.

01:18:33.216 --> 01:18:36.400
 x 축의 방향으로 a 만큼
평행이동했어요.

01:18:36.500 --> 01:18:40.868
 x 대신에 $x-a$ 를 넣어서
가야 한다는 거죠.

01:18:40.968 --> 01:18:44.416
그 직선의 방정식이 그대로
사용해주려고 한다면

01:18:44.516 --> 01:18:46.804
모든 좌표들에 a 만큼을
더해놓은 거니까

01:18:46.904 --> 01:18:50.209
다시 a 만큼을 빼서 대입해야
식이 성립한다는 차원에서

01:18:50.309 --> 01:18:51.673
 $x-a$ 를 했고요.

01:18:51.773 --> 01:18:55.120
역시 y 축으로 $2a$ 만큼
평행이동했다 그러면

01:18:55.220 --> 01:18:59.147
 y 대신에 새로운
 y 는 $2a$ 만큼을 빼서

01:18:59.247 --> 01:19:01.068
원래 식에 넣어주어야 되죠.

01:19:01.168 --> 01:19:07.943
그랬더니 $y=3x-3a-5+2a$ 라는
식이 되었어요.

01:19:08.043 --> 01:19:10.449
 $3x-a-5$ 가 되는데,

01:19:10.549 --> 01:19:12.127
이것이 애랑 일치한대요.

01:19:12.227 --> 01:19:14.827
직선이 일치할 조건,
기울기가 서로 같고

01:19:14.927 --> 01:19:20.383
절편도 서로 같으면 되니까

-a-5=10이면 되겠죠.

01:19:20.483 --> 01:19:23.980

그래서 a의 값이 5가 된다고
찾을 수가 있습니다.

01:19:24.080 --> 01:19:29.904

이번 3번에서는 애를 직선 $y=x$ 에
대하여 대칭이동한 원을 구했고

01:19:30.004 --> 01:19:33.187

그것과 그 원 위의
임의의 점에 대해서

01:19:33.287 --> 01:19:35.156

P, Q 사이의 최소
거리를 구해주래요.

01:19:35.256 --> 01:19:37.249

그러면 또 역시 이동시켰을 때

01:19:37.349 --> 01:19:40.780

어떤 게 되는지를 쉽게
파악해보도록 하기 위해서

01:19:40.880 --> 01:19:42.593

표준형으로 고쳐볼까요?

01:19:42.693 --> 01:19:45.725

$(x-1)^2 + (y+2)^2$
나오게 되고.

01:19:45.825 --> 01:19:48.377

그다음에 이거는
1이라고 변형이 되죠?

01:19:48.477 --> 01:19:52.399

여러분도 변형 익숙하게 하실 수
있을 것 같아서 제가 빨리 했어요.

01:19:52.499 --> 01:19:58.189

그러면 중심이 1, -2고
반지름이 1인 원이었는데

01:19:58.289 --> 01:20:01.426

애를 $y=x$ 에 대해서
대칭이동했습니다.

01:20:01.526 --> 01:20:06.289

중심이 1, -2였으니까
대칭이동시켰을 때는

01:20:06.389 --> 01:20:10.162

중심이 x랑 y랑 좌표를
서로 바꿔주는 거죠.

01:20:10.262 --> 01:20:15.475

-2, 1이 새로운 중심이 되면서
원이 만들어지게 될 거예요.

01:20:15.575 --> 01:20:17.397

반지름은 변함없죠.

01:20:17.497 --> 01:20:20.550

그대로 1로 유지가
되는 그런 원입니다.

01:20:20.650 --> 01:20:25.503

그런데 두 원 사이에 아무 점이나
잡아서 연결했을 때 최소 거리가 되래요.

01:20:25.603 --> 01:20:28.262

원에서 최소 거리, 최장
거리 구하려고 한다면

01:20:28.362 --> 01:20:30.406

누구를 기준으로 생각하라고 했었죠?

01:20:30.506 --> 01:20:35.632

중심에서부터 원 위의 점까지
거리가 반지름만큼 빠지게 되면

01:20:35.732 --> 01:20:40.551

가장 멀어지게 되니까 결국 이 점부터
이 점 사이의 거리가 되겠죠.

01:20:40.651 --> 01:20:42.925

이 점부터 이 점
사이의 거리라는 것은

01:20:43.025 --> 01:20:47.121

이 원 2개의 중심과 중심
사이의 거리를 구하는 거예요.

01:20:47.221 --> 01:20:52.812

-2, 1과 1, -2 사이의
거리를 구해본 다음에

01:20:52.912 --> 01:20:57.530

거기에서 각각의 반지름
한 번씩 빼주면 되겠죠.

01:20:57.630 --> 01:21:01.196

이거 빼고 이거 빼면 이 사이의
거리만 나오면 되겠죠.

01:21:01.296 --> 01:21:05.205

반지름이 원래 1이었으니까
여기서 1 빼고

01:21:05.305 --> 01:21:09.116

여기서 1 빼서 총 2를
빼주면 되겠습니다.

01:21:09.216 --> 01:21:13.512

그러면 $9+9$ 가 되니까 $3\sqrt{2}$ 죠.

01:21:13.612 --> 01:21:17.385

그래서 $3\sqrt{2}$ 에서 2를
빼 것만큼으로 되면서

01:21:17.485 --> 01:21:20.679

답은 3번으로 찾아주면
되는 거고요.

01:21:20.779 --> 01:21:23.830
원과 원 사이의 거리도
원과 직선 사이처럼

01:21:23.930 --> 01:21:26.024
마찬가지로 생각해주면
된다는 거예요.

01:21:26.124 --> 01:21:27.674
중심과 중심을 연결해주고

01:21:27.774 --> 01:21:31.120
여기 반지름이 원 통과할 수
있는 것 중에 가장 긴 거리니까

01:21:31.220 --> 01:21:34.183
여기 사이의 거리를 구해주면 된다고

01:21:34.283 --> 01:21:37.312
이렇게 도형의 이동 문제였지만
원의 성질 같은 것,

01:21:37.412 --> 01:21:40.457
또 직선의 성질 당연히
이용해서 푸는 문제들 나와요.

01:21:40.557 --> 01:21:44.080
그래서 2개의 점 사이의
거리 구하는 거는

01:21:44.180 --> 01:21:48.151
이제 점의 이동만 할 수 있으면
쉽게 찾을 수가 있고.

01:21:48.251 --> 01:21:50.927
거기서 반지름 한 번씩
빼서 구하게 되었습니다.

01:21:51.027 --> 01:21:56.618
19-4번에서는 $y=x$
위의 한 점 P가 있는데,

01:21:56.718 --> 01:22:03.725
그 P에서부터 A는 3, 2
여기에 A가 있고.

01:22:03.825 --> 01:22:06.688
B는 5, 3
여기에 B가 있어요.

01:22:06.788 --> 01:22:10.118
 $y=x$ 는 원점과 1, 1 지나가니까

01:22:10.218 --> 01:22:12.207
직선 이런 식으로 그릴 수가 있죠.

01:22:12.307 --> 01:22:15.333
그런데 $AP+BP$ 가 최소래요.

01:22:15.433 --> 01:22:19.342

그런데 A하고 B는 이 직선에
대해서 같은 쪽에 있습니다.

01:22:19.442 --> 01:22:23.601

그래서 최소가 될 때 삼각형
ABP의 넓이를 구해보자고 했는데

01:22:23.701 --> 01:22:28.016

그냥 P의 좌표를 a, a로
해서 계산을 해보려고 하면

01:22:28.116 --> 01:22:30.358

아까 우리 마지막으로
풀었던 예제처럼

01:22:30.458 --> 01:22:32.164

굉장히 어려운 상황이 돼요.

01:22:32.264 --> 01:22:37.935

그래서 AP+BP를 쉽게
구할 수 있도록 하기 위해서

01:22:38.035 --> 01:22:41.447

뭔가 쪽 연결할 수 있는
모양으로 바꿀 수 있지 않을까?

01:22:41.547 --> 01:22:45.187

그러면 둘 중에 아무거나
점 하나 잡아서

01:22:45.287 --> 01:22:47.920

애를 지금 $y=x$ 위의 점이니까

01:22:48.020 --> 01:22:51.345

$y=x$ 에 대해서 대칭이동을
시켜보는 거예요.

01:22:51.445 --> 01:22:56.443

그러면 이게 3, 2였으니까 이거는
2, 3으로 대칭이동되겠죠.

01:22:56.543 --> 01:23:01.914

이렇게 만들어냈을 때
AP+BP와 A'P+BP는

01:23:02.014 --> 01:23:03.901

항상 같을 수밖에 없다는 거죠.

01:23:04.001 --> 01:23:07.762

대칭축이기 때문에 이렇게
이렇게 했을 때

01:23:07.862 --> 01:23:10.356

당연히 이게 수직이등분선,

01:23:10.456 --> 01:23:13.852

이 $y=x$ 가 AA'의
수직이등분선이 되니까

01:23:13.952 --> 01:23:16.935

AP와 A'P는 같을
수밖에 없어요.

01:23:17.035 --> 01:23:22.146

그런데 이제 A'P+BP의
최솟값을 구하려고 할 때

01:23:22.246 --> 01:23:23.912

어떻게 가는 게 최소인가요?

01:23:24.012 --> 01:23:27.182

당연히 쪽 연결해주는,
이렇게 꺾인선보다는

01:23:27.282 --> 01:23:31.847

쪽 직선으로 연결해준 선이
가장 최단이 되는 거죠.

01:23:31.947 --> 01:23:35.107

그래서 A'은 2, 3이라는 것과

01:23:35.207 --> 01:23:41.340

B는 5, 3 애를 쪽 연결해준 여기가
최소가 된다고 볼 수 있는데.

01:23:41.440 --> 01:23:44.634

가만히 보니까 여기
2, 3이고 여기 5, 3이면

01:23:44.734 --> 01:23:46.469

둘의 y좌표가 똑같아요.

01:23:46.569 --> 01:23:49.556

그림을 좀 더 정교하게
그렸다고 한다면

01:23:49.656 --> 01:23:52.068

A가 원래 3, 2였죠.

01:23:52.168 --> 01:23:55.708

그리고 이거를 대칭시켰을
때 2, 3이 되었고

01:23:55.808 --> 01:23:57.625

그다음에 B는 5, 3

01:23:57.725 --> 01:24:00.321

여기 그대로 유지되도록
이렇게 나오게 된 거죠.

01:24:00.421 --> 01:24:03.995

이게 B, A, A'으로
나오게 되었고.

01:24:04.095 --> 01:24:07.723

$y=x$ 가 있을 때 애네가
쪽 연결된다는 것은

01:24:07.823 --> 01:24:12.675

y좌표가 같기 때문에 이렇게 x축에

평행한 직선으로 연결이 되는 것인데,

01:24:12.775 --> 01:24:15.868
여기에 그러면 P가 위치하게 될 때

01:24:15.968 --> 01:24:22.606
AP+BP와 A'B가
같아지게 되면서

01:24:22.706 --> 01:24:27.328
애가 늘 크거나 같다는
게 늘 성립하게 되니까

01:24:27.428 --> 01:24:31.783
이 길이가 바로 최소가 되도록 하는
P의 위치를 찾을 수 있는 거예요.

01:24:31.883 --> 01:24:36.544
그랬을 때 지금 문제에서는 이거의
넓이를 구하라고 했거든요.

01:24:36.644 --> 01:24:38.290
넓이 어떻게 나올까요?

01:24:38.390 --> 01:24:41.761
A'의 좌표가 원래
2, 3이었어요.

01:24:41.861 --> 01:24:45.645
그다음에 여기 B의
좌표가 5, 3입니다.

01:24:45.745 --> 01:24:48.455
그러면 이것도 y좌표가
지금 3이잖아요.

01:24:48.555 --> 01:24:50.589
3으로 유지가 되도록 한 거니까.

01:24:50.689 --> 01:24:53.397
그러면 $y=x$ 상에
있는 점이기 때문에

01:24:53.497 --> 01:24:59.561
여기 y의 좌표가 3이라면
x는 3일 수밖에 없죠.

01:24:59.661 --> 01:25:01.589
여기 3, 3으로 나오게 되죠.

01:25:01.689 --> 01:25:04.095
그리고 x축에 평행해요.

01:25:04.195 --> 01:25:07.572
그렇기 때문에 여기서부터
여기까지의 거리를 봤을 때

01:25:07.672 --> 01:25:13.535
그냥 A의 y좌표와 이 3사이의
거리인 1로 계산해주면 됩니다.

01:25:13.635 --> 01:25:17.029

그래서 이거의 길이가
5-3해주면 2,

01:25:17.129 --> 01:25:20.428

여기의 길이가 y 좌표끼리의
차이를 구해서 1,

01:25:20.528 --> 01:25:25.309

곱하기 삼각형이니까 $1/2$ 해서
넓이는 1이 된다고 찾을 수 있죠.

01:25:25.409 --> 01:25:27.617

그래서 답은 1번으로 나오게 돼요.

01:25:27.717 --> 01:25:31.127

대칭이동만 잘 시켜서 y 좌표
서로 같다는 거를 이용해주면

01:25:31.227 --> 01:25:33.546

쉽게 삼각형의 넓이를
구할 수가 있고요.

01:25:33.646 --> 01:25:37.987

이번에는 $y=2x+2$ 라는
직선이 있는데

01:25:38.087 --> 01:25:42.153

이거를 또 $y=x$ 에
대해서 대칭시켰어요.

01:25:42.253 --> 01:25:44.623

식을 대칭시킬 때 어떻게 된다고요?

01:25:44.723 --> 01:25:47.475

x 랑 y 랑 자리를
바꿔서 넣으면 되죠.

01:25:47.575 --> 01:25:51.529

그리고 이것을 다시 x 축에
대해서 대칭이동시켰습니다.

01:25:51.629 --> 01:25:54.179

x 축 대칭시킬 때는 뭐만 바뀌죠?

01:25:54.279 --> 01:25:56.276

y 의 부호가 바뀌게 되는 거죠.

01:25:56.376 --> 01:26:00.029

그래서 y 의 부호를 다시
바꿔서 넣어주어야 되니까

01:26:00.129 --> 01:26:06.033

이런 식이 나와서 이거를 나타내는
식을 찾으면 답이 나오겠네요.

01:26:06.133 --> 01:26:07.243

그래서 답 3번.

01:26:07.343 --> 01:26:11.946

이거랑 똑같은 식은 3번에 있으니까

답 3번으로 나오게 되고요.

01:26:12.046 --> 01:26:16.266
19-6번, 이번에는
A가 1, 3인데

01:26:16.366 --> 01:26:20.435
x축에 대해서 대칭시켰더니
B라는 점이 나왔어요.

01:26:20.535 --> 01:26:22.960
y좌표만 -로 바뀌게 되죠.

01:26:23.060 --> 01:26:26.476
y축에 대해서 대칭시킨
것은 C가 되었습니다.

01:26:26.576 --> 01:26:29.246
그러면 x좌표만 -로 바뀌게 되죠.

01:26:29.346 --> 01:26:32.671
그다음에 D라는 점이
a, b가 되는데

01:26:32.771 --> 01:26:35.468
이거를 또 x축에
대해서 대칭시켰대요.

01:26:35.568 --> 01:26:37.101
그러면 어떻게 돼요?

01:26:37.201 --> 01:26:40.758
옮겨진 점은 이거를 E라고
불인다고 했는데,

01:26:40.858 --> 01:26:46.059
E는 x축에 대한 대칭이니까
y 값만 -로 바뀌게 되죠.

01:26:46.159 --> 01:26:50.332
문제에서는 애네가 한 직선
위에 있다고 했어요.

01:26:50.432 --> 01:26:56.140
좌표평면 상에서 B, C,
E라는 것이 한 직선에 있다.

01:26:56.240 --> 01:26:59.229
어떻게 구하면 될까요?

01:26:59.329 --> 01:27:04.402
B, C 있으니까 이 BC로 만들어지는
직선의 기울기가 나오게 되겠죠.

01:27:04.502 --> 01:27:08.809
그거랑 CE로 만들어지는
직선의 기울기가 서로 같다.

01:27:08.909 --> 01:27:11.214
이거를 사용해줄 수가 있을 거예요.

01:27:11.314 --> 01:27:15.681

직선 BC의 기울기와
CE의 기울기.

01:27:15.781 --> 01:27:19.627

그런데 BC를 보니까 아예
이렇게 식이 나와있네요.

01:27:19.727 --> 01:27:21.823

아예 직선 BC를
찾을 수가 있겠죠.

01:27:21.923 --> 01:27:23.000

구해볼까요?

01:27:23.100 --> 01:27:29.578

BC의 기울기는 $-3-3/1+1=-3$ 으로
나오게 되고요.

01:27:29.678 --> 01:27:33.465

그러면 지나는 점
-1, 3을 가지고 생각해본다면

01:27:33.565 --> 01:27:37.037

$-3(x+1)+3$ 이라고
나오게 되니까

01:27:37.137 --> 01:27:41.107

$y=-3x-2$ 라고 나오죠.

01:27:41.207 --> 01:27:46.725

그랬을 때 지금 CE의
기울기는 어떻게 되느냐?

01:27:46.825 --> 01:27:52.547

$-b-3/a+1$ 이런
식으로 나오게 되거든요.

01:27:52.647 --> 01:27:57.732

그런데 이때 직선 AD의
기울기를 구해보자고 했어요.

01:27:57.832 --> 01:28:02.855

그러면 AD의 기울기는
식으로 썼을 때

01:28:02.955 --> 01:28:09.345

A가 1, 3이고 D가
a, b로 나오게 되니까

01:28:09.445 --> 01:28:13.032

$b-3/a-1$ 이다.

01:28:13.132 --> 01:28:14.916

이런 식으로 나오죠?

01:28:15.016 --> 01:28:19.189

그래서 이거의 값이 -3이라는
거를 알고 있을 때

01:28:19.289 --> 01:28:22.567

이 값은 어떻게 되는지를
찾아보면 되겠습니다.

01:28:22.667 --> 01:28:25.842
그러면 이 b 의 값을
계산하기 위해서

01:28:25.942 --> 01:28:29.706
여기서 a 하고 b 사이의 관계식을
생각해볼 수가 있죠.

01:28:29.806 --> 01:28:31.681
- $3a-3$ 이랑

01:28:31.781 --> 01:28:35.896
그다음에 - $b-3$ 이랑 서로
같아지게 되는 거예요.

01:28:35.996 --> 01:28:38.960
그러면 b 를 없앤다고 생각해보면

01:28:39.060 --> 01:28:40.848
-3 옮겨가게 되면,

01:28:40.948 --> 01:28:46.706
- b 가 -3 양변에서 없었을 때
- $3a$ 가 되고

01:28:46.806 --> 01:28:49.995
 b 하고 $3a$ 하고 서로
같아지게 되는 거죠.

01:28:50.095 --> 01:28:54.639
그래서 여기서 b 대신에
 $3a$ 를 집어넣었을 때

01:28:54.739 --> 01:28:57.815
값이 3으로 일정하게
나오게 되겠네요.

01:28:57.915 --> 01:29:02.893
그래서 AD의 기울기를 구한다면
3이 된다고 찾을 수가 있어요.

01:29:02.993 --> 01:29:05.680
그래서 답은 5번으로
구해주면 되겠습니다.

01:29:05.780 --> 01:29:10.762
이렇게 쭉 이동하다보면 값을
찾을 수가 있는 문제였고요.

01:29:10.862 --> 01:29:13.553
이렇게 좀 정리를 해서 봤는데,

01:29:13.653 --> 01:29:17.431
이런 평행이동,
대칭이동을 이용한다면

01:29:17.531 --> 01:29:21.809
제가 아까 말씀드렸던 것처럼 복잡한

식의 그래프를 그리는 것이

01:29:21.909 --> 01:29:23.192
좀 쉬워질 수도 있고.

01:29:23.292 --> 01:29:26.163
복잡한 상황의 것을 좀 더
간단하게 바꿔서 볼 수도 있어요.

01:29:26.263 --> 01:29:29.916
원도 생각해 보면 평행이동했을 때
중심만 바뀌게 되는 거잖아요.

01:29:30.016 --> 01:29:33.494
그렇기 때문에 중심을 좀 간단한
것으로 이동을 시켜놓고

01:29:33.594 --> 01:29:36.135
어떤 성질을 본다면지, 그런
것을 할 수가 있습니다.

01:29:36.235 --> 01:29:38.191
그래서 다음 강에서는
이런 거를 이용해서

01:29:38.291 --> 01:29:42.254
절댓값 다시 초대해서 절댓값을
포함한 식의 그래프를

01:29:42.354 --> 01:29:46.181
어떻게 효율적으로 그릴 수
있을지를 살펴보도록 하겠습니다.